Beispiele zum Randwertproblem der Variationsrechnung

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II DER
UNIVERSITÄT BERN

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

Hans Hermann Bieri

von Trachselwald

ZÜRICH 1941
Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64.

Beispiele zum Randwertproblem der Variationsrechnung

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II DER
UNIVERSITÄT BERN

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

Hans Hermann Bieri

von Trachselwald

ZÜRICH 1941
Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64.

Von der Philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. Dr. W. Scherrer angenommen.

Bern, den 17. November 1938.

Der Dekan:
Prof. S. Mauderli.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis

I. Teil: **Theoretische Grundlagen** Seite

§ 1. Einleitung 5
§ 2. Der Abbildungssatz 6
§ 3. Grundformeln 7
§ 4. Die Extremalen 8
§ 5. Die ausgezeichnete Extremalenschar und die konjugierten Punkte . 9
§ 6. Anwendung des Abbildungssatzes 10
§ 7. Numerierung, spezielle Bezeichnungen und Rechnungsmethoden . 10

2. Teil: **Beispiele**

I. $F = \sqrt{(y^2 - 1)(x'^2 + y'^2)}$

§ 1. Existenzgebiet des Problems 13
§ 2. Extremalen und ausgezeichnete Extremalenschar . . . 13
§ 3. Die Enveloppenbedingung 14
§ 4. Zusammenhang von $\varkappa$ und τ 14
§ 5. Die Enveloppe 18
§ 6. Anwendung des Abbildungssatzes 26

II. $F = \sqrt{(1 - y^2)(x'^2 + y'^2)}$

§ 1. Existenzgebiet des Problems 28
§ 2. Extremalen und ausgezeichnete Extremalenschar . . . 28
§ 3. Die Enveloppenbedingung 29
§ 4. Zusammenhang von $\varkappa$ und τ 29
§ 5. Die Enveloppe 31
§ 6. Anwendung des Abbildungssatzes 34
§ 7. Ergänzungen 34

III. $F = \sqrt{(1 + y^2)(x'^2 + y'^2)}$

§ 1. Existenzgebiet des Problems 35
§ 2. Extremalen und ausgezeichnete Extremalenschar . . . 36
§ 3. Die Enveloppenbedingung 37
§ 4. Zusammenhang von $\varkappa$ und τ 37
§ 5. Die Enveloppe 39
§ 6. Anwendung des Abbildungssatzes 58
§ 7. Ergänzung 60

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547622_0064

1. Teil: Theoretische Grundlagen

§ 1. Einleitung

Das Randwertproblem der Variationsrechnung besteht darin, durch 2 beliebig ausgewählte Punkte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine Extremale zu legen, welche ein Extremum eines Kurvenintegrales mit vorgegebenem Integranden liefert. Die Lösung des gestellten Problems stößt bei konkreten Beispielen auf erhebliche rechnerische Schwierigkeiten. Eine gute Vorstellung davon gibt das von *Carathéodory* vollständig durchgerechnete Beispiel der Rotationsfläche kleinster Oberfläche [1]). Es liegt nun nahe, die dortige Grundfunktion $L = \sqrt{x^2(1 + x'^2)}$ etwas abzuändern und zu untersuchen, ob die Berechnung sich noch explizite durchführen lasse. Als natürlichste Abänderung der Grundfunktion kann die Ersetzung von x^2 durch x^2-1, $1-x^2$ und x^2+1 gelten. Es hat sich gezeigt, daß nun die homogene Behandlung [2]) vorzuziehen ist. Die vorliegende Arbeit befaßt sich demnach mit der Lösung des Randwertproblems für die 3 Variationsprobleme

$$\int \sqrt{(y^2 - 1)(x'^2 + y'^2)}\, dt = \text{Extremum.} \qquad \text{I}$$

$$\int \sqrt{(1 - y^2)(x'^2 + y'^2)}\, dt = \text{Extremum.} \qquad \text{II}$$

$$\int \sqrt{(1 + y^2)(x'^2 + y'^2)}\, dt = \text{Extremum.} \qquad \text{III}$$

y, x, t haben die übliche Bedeutung. Die von *Carathéodory* eingeführten Bezeichnungen x_i, y_i, t werden nur im theoretischen Teil verwendet. Die Bedeutung dieser Zeichen ist dem schon zitierten Werk zu entnehmen. Im Beispiel der Rotationsfläche

---

[1]) *Carathéodory:* Variationsrechnung, 2. Teil, 360, S. 297 ff.
[2]) *Carathéodory:* Variationsrechnung, 2. Teil, 247, S. 212 ff.

kleinster Oberfläche liefert die Diskussion von $\frac{\partial x}{\partial a}$ die Enveloppe in expliziter Gestalt, und diese wichtige Kurve kann sogar als konvex nachgewiesen werden. Ferner gestattet die Existenz einer monotonen Funktion $t = t(a)$ die vollständige Lösung des Randwertproblems.

Für unsere Beispiele ist zwar die Enveloppe auch explizit zu erhalten, doch stößt ihre vollständige Diskussion auf praktisch wohl unlösbare Schwierigkeiten. Es gelingt gerade noch der Nachweis, daß diese Kurve einfach[3]) ist oder aus einfachen Teilbögen besteht. Das Analogon zu der monotonen Funktion $t = t(a)$ existiert im allgemeinen nicht. Trotzdem erreichen wir unser Ziel und zwar dadurch, daß wir das Randwertproblem auf eine umkehrbar eindeutige Abbildung zurückführen. Als angenehme Nebenerscheinung werden so alle Extremalenbögen durch zwei Punkte, die kein Extremum liefern, zum vornherein ausgeschaltet, und es entfällt die lästige Fallunterscheidung. Das Kernstück unserer Arbeit wird somit ein Abbildungssatz sein. Wegen seiner Wichtigkeit stellen wir ihn an die Spitze der theoretischen Erörterungen.

§ 2. Der Abbildungssatz[4])

Voraussetzungen:

1. $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ und $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$ sind stetig differenzierbar im Innern und auf dem Rand C eines einfach-zusammenhängenden Gebietes G der (x, y)-Ebene.
2. $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0$ in G.
3. Das Bild des Randes C von G gehört zum Rand $\overline{C}$ des Bildes von G.
4. Es existiert ein Punkt (x_0, y_0) in G, dessen Bild $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ einem einfach-zusammenhängenden Restgebiet $\overline{G}$ von $\overline{C}$ angehört und umgekehrt nur (x_0, y_0) zum Original hat.

---

[3]) Im Sinne der geometrischen Mengenlehre.

[4]) Fassung von Prof. Dr. *W. Scherrer*, Bern.

Behauptungen:

1. Die Abbildung liefert keinen Punkt in einem von $\bar{G}$ verschiedenen Restgebiet von $\bar{C}$.
2. Für jeden Punkt im Innern von $\bar{G}$ ist die Abbildung umkehrbar eindeutig.

§ 3. Grundformeln

Unsere Variationsprobleme sind vom Typus

$$\int \sqrt{U(x_1, x_2)\,(x'^2_1) + x'^2_2)}\, dt.$$

$U(x_1, x_2)$ ist eindeutig, stetig und stetig differenzierbar. Mit Rücksicht auf die Quadratwurzel sind negative Werte auszuschließen. Die Wurzel werde durchwegs mit dem positiven Vorzeichen genommen.

Die zugehörige Hamiltonsche Funktion lautet[5]):

$$\boxed{2H = y_1^2 + y_2^2 - U(x_1, x_2)} \qquad (1)$$

Die Funktion F_1, deren Vorzeichen über die Regularität der Linienelemente entscheidet, hat die Form

$$\boxed{F_1 = \frac{\lambda}{|\lambda|}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\ ^{6})} \qquad (2)$$

Dabei ist λ positiv zu nehmen, sodaß F_1 positiv semidefinit ist. Der Vergleich von (2) mit (1) lehrt, daß F_1 mit $U(x_1, x_2)$ zugleich verschwindet. Die Kurve $U = 0$, die Nullinie des Variationsproblems, trägt also lauter singuläre Linienelemente, während alle übrigen Linienelemente positiv regulär sind. Alle Extremalen, welche die Nullinie vermeiden, sind demnach Minimalen. Was die Nullinie betrifft, so liefert das längs ihr genommene Kurvenintegral bei unsern Festsetzungen über $U(x_1, x_2)$ den absolut kleinsten Wert Null. Da für unsere Bei-

---

[5]) *Carathéodory:* S. 229 ff.
[6]) *Carathéodory:* S. 307 ff.

spiele U nur von x_2 abhängt, so kann man aus $U(x_2)\ (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$ direkt entnehmen, daß das längs eines Geradenstückes von $P(x_1 = \text{konst},\ x_2 = 0)$ bis $Q(x_1 = \text{konst},\ x_2)$ genommene Kurvenintegral einen kleinern Wert liefert als dasselbe Kurvenintegral genommen längs jeder Vergleichskurve mit denselben Endpunkten; denn für alle Vergleichskurven fällt $U(x_2)$ nicht kleiner, $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$ aber größer aus. Trotz der singulären Linienelemente in den Punkten P sind also die genannten Geradenstück längs ihres ganzen Verlaufes Minimalen.

Bei dieser einfachen Sachlage erübrigt sich die genaue Diskussion der Weierstrasschen E-Funktion, von der man mühelos feststellt, daß sie dasselbe Vorzeichen und dieselben Nullstellen wie F_1 besitzt.

§ 4. Die Extremalen

Nach der allgemeinen Theorie erhält man aus (1) die Differentialgleichungen der Extremalen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} U \end{aligned}\right\} \longrightarrow \ddot{x}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} U \tag{3}$$

Besteht, was für unsere Beispiele der Fall ist, U aus einer Summe von Funktionen α_i, von denen jede nur von einer Variablen abhängt, so gelingt die Trennung der Variablen:

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dx_i}\alpha_i$$

$$2\dot{x}_i\ddot{x}_i = \dot{x}_i\frac{d}{dx_i}\alpha_i \longrightarrow \dot{x}_i^2 = \alpha_i(x_i) + c_i$$

Nun hat die Hamiltonsche Funktion (1) längs jeder Extremalen beständig den Wert Null. Daraus ergibt sich für die Konstanten die Beziehung $c_1 + c_2 = 0$. Man findet weiter:

$$\boxed{\dot{x}_i = \sqrt{\alpha_i(x_i) + c_i}\ ;\ \int \frac{dx_i}{\sqrt{\alpha_i(x_i) + c_i}} = t + A_i} \tag{4}$$

Nur die Differenz $A_1 - A_2$ ist wesentlich; deshalb kann eine der neuen Konstanten gleich Null gesetzt werden.

Unsere Beispiele sind weitgehend spezialisiert, indem $\alpha_1(x_1)$ identisch verschwindet. Falls man noch $c_1 = 0$ wählt, so erhält man die speziellen Extremalen $x_1 = \text{konst}$, von denen im § 3 die Rede war.

§ 5. Die ausgezeichnete Extremalenschar und die konjugierten Punkte

Die Lösung des Randwertproblems verlangt Umformung der zweiparametrigen Kurvenschar, die man aus (4) erhält derart, daß alle Extremalen einen beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$ [7]), den Knotenpunkt, durchlaufen. Durch Einsetzen von x_0, y_0 und t_0, des Wertes von t in P, gefolgt von Eliminationen und Substitutionen (die letztern mit Rücksicht auf die Rationalität!), kann unsere Extremalenschar, die ausgezeichnete Extremalenschar, auf die Gestalt.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t, \xi, \eta, \varkappa) \\ y &= y(t, \xi, \eta, \varkappa) \end{aligned}} \tag{5}$$

gebracht werden. $\varkappa$ ist ein Scharparameter; ξ, η sind Funktionen der Koordinaten des Knotenpunktes.

Jede Extremale aus (5) verliert ihren Extremumcharakter, sobald die Größe

$$\boxed{\Delta(t, \varkappa) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \varkappa)}} \tag{6}$$

zum 1. Mal verschwindet [8]).

Es liegt dann ein zu P konjugierter Punkt vor. Der geometrische Ort dieser Punkte sowie aller weitern Brennpunkte ist die Enveloppe von (5).

---

[7]) Der Bequemlichkeit halber werden fortan die gebräuchlichen Bereichungen verwendet.

[8]) Alle Punkte mit $\Delta(t, \varkappa) = 0$ heißen Brennpunkte.

Den Wert von t für $\Delta(t, \varkappa) = 0$ nennen wir τ. $\Delta(\tau, \varkappa) = 0$ ist begrifflich sowohl nach τ als auch nach $\varkappa$ aufzulösen. Unsere Beispiele gestatten nur das letztere. Dies ausnützend, erhalten wir die explizite Enveloppengleichung [9]).

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x[\xi, \eta, \tau, \varkappa(\tau)] \\ y &= y[\xi, \eta, \tau, \varkappa(\tau)] \end{aligned}} \tag{7}$$

§ 6. Anwendung des Abbildungssatzes

Unter Verwendung der Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen ist es nun nicht schwierig, den Abbildungssatz (§ 2) für die Lösung des Randwertproblems nutzbar zu machen.

In einer $(t, \varkappa)$-Ebene wird der Rand C von G definiert durch $\Delta(\tau, \varkappa) = 0$.

Für innere Punkte von G gilt dann: $t_0 \leqq t < \tau$. In der (x, y)-Ebene wird der Rand $\overline{C}$ von $\overline{G}$ dargestellt durch (7).

(5) liefert mit der Einschränkung $t_0 \leqq t < \tau$ die in Frage stehende Abbildung.

$\Delta(t, \varkappa)$ verschwindet bei unserer Koordinatenwahl für $t = t_0$. Diese unerwünschte Singularität kann durch eine geeignete Transformation der Parameter t, $\varkappa$ beseitigt werden.

Alle weitergehenden Aussagen hängen von der Natur von C, G, $\overline{C}$ und $\overline{G}$ ab.

§ 7. Numerierung, spezielle Bezeichnungen und Rechnungsmethoden

a) Die Numerierung ist für den 1. Teil durchgehend. Im 2. Teil ist jedes Beispiel mit eigener Numerierung versehen, und zwar stimmen die Nummern korrespondierender Aussagen so weit als möglich überein. Außerdem ist ein umfangreicher Beweis im Beispiel III besonders numeriert. Wird auf eine Nummer verwie-

[9]) Wir werden allerdings von (7) keinen Gebrauch machen, wenn es gilt, die Einfachheit der Enveloppe nachzuweisen.

sen, so handelt es sich, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, um eine solche des gleichen Abschnittes.

b) Für die den Kreisfunktionen nahe verwandten Hyperbelfunktionen verwenden wir deutsche Buchstaben.

Bekanntlich gelten die Relationen: [10]):

$$\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$$

$$\mathfrak{Tg}^2 x - 1 = -\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 x}$$

$$\mathfrak{Cotg}^2 x - 1 = +\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x}$$

Die Beziehung zu den Exponentialfunktionen ist gegeben durch:

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß bei Differentiationen und Integration das Vorzeichen nicht umschlägt.

Eine Kurve $y = y(x)$ nennen wir konvex (konkav), wenn die 1. Ableitung $\frac{dy}{dx}$ mit wachsendem x zunimmt (abnimmt).

Totale und partielle Differentiationen werden durch ′ u. ˙ bezeichnet, sofern kein Mißverständnis entstehen kann!

c) Wir haben oft die Anzahl der Wurzeln transzendenter Gleichungen $\Phi(x) = 0$ zu bestimmen und bedienen uns hierzu einer bequemen graphischen Methode: $\Phi(x) = 0$ wird in der Form $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$ angesetzt. Gelingt es nun, die Kurven $y_1 = \Phi_1(x)$, $y_2 = \Phi_2(x)$ vollständig zu diskutieren [11]), so ist in günstigen Fällen das Wurzelproblem lösbar.

Ebenso häufig muß festgestellt werden, ob eine Funktion $\Psi(x)$ im Intervall $x_0 \leq x < \infty$ positiv sei. Hierfür ist bekanntlich hinreichend, daß die Funktion und sämtlich Ableitungen für $x = x_0$ positiv und endlich seien; denn es gilt dann die Taylorsche Entwicklung:

---

[10]) Weitere Einzelheiten: *Jahnke-Emde,* Funktionentafeln.

[11]) Im allgemeinen braucht man die ersten zwei Ableitungen, in speziellen Fällen auch noch die dritten!

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \sum_{i=1\ldots n} \Phi^{(i)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^i}{i\,!}$$

wo Φ^i die i-te Ableitung bedeutet.

Ist speziell:

$$\Phi(o) = \Phi^{(1)}(o) = \cdots \Phi^{(k)}(o) = 0; \quad \Phi^{(k)}(x > o) > 0$$

so liefert die Rekursionsformel

$$\Phi^{(l)}(x) = \int_0^x \Phi^{(l+1)}(t)\,dt > 0 \qquad \begin{matrix}(l = 0,1 \cdots k - 1)\\ (\Phi^0(x) = \Phi(x))\end{matrix}$$

das gewünschte Resultat $\Phi(x > 0) > 0$; denn für ein positiv definites Integral ist ein ebensolcher Integrand hinreichend.

Die gemachten Aussagen gelten natürlich sinngemäß für anders beschaffene Intervalle.

2. Teil: Beispiele

I. $F = \sqrt{(y^2 - 1)(x'^2 + y'^2)}$

§ 1. Existenzgebiet des Problems

Das vorliegende Variationsproblem ist dem klassischen Ausgangsproblem am nächsten verwandt. Existenzgebiet ist die abgeschlossene Halbebene $y \geq 1$.

§ 2. Extremalen und ausgezeichnete Extremalenschar

Mit Hilfe der Formeln des § 4, 1. Teil, erhalten wir

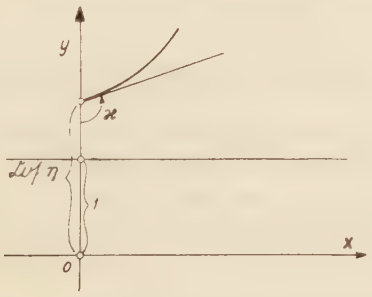
$$x' = k \qquad y' = \pm \sqrt{y^2 - 1 - k^2}$$

Als Knotenpunkt wählen wir einen Punkt P mit der Abszisse Null und einer Ordinate > 1 [12]). Weitergehende Spezialisation erweist sich erst bei der Diskussion der Enveloppe als notwendig. Integration liefert:

$$x = kt \qquad y = y_0 \operatorname{Cof} t \pm \sqrt{y_0^2 - 1 - k^2}\, \operatorname{Sin} t$$

Sämtliche Extremalen durchlaufen P mit dem Parameterwert $t_0 = 0$.

Durch passende Substitutionen kann die Wurzel weggebracht werden (Abb. 1):



[12]) Wegen der Invarianz der Grundfunktion gegenüber Translation wird dadurch die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt.

$$y_0 = \mathfrak{Cof}\,\eta$$
$$k = \mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \sin\varkappa$$
$$y_0^2 - 1 - k^2 = \mathfrak{Sin}^2\eta \cdot \cos^2\varkappa.$$

Die Gleichung der ausgezeichneten Extremalenschar durch P nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \sin\varkappa \cdot t \\ y &= -\mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \cos\varkappa \cdot \mathfrak{Sin}\,t + \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \mathfrak{Cof}\,t \end{aligned}} \tag{1}$$

Aus Symmetriegründen darf $\varkappa$ auf das Intervall $0 \leq \varkappa \leq \pi$ beschränkt werden. Der Parameter $\varkappa$ hat eine einfache geometrische Bedeutung, nämlich: $\operatorname{cotg}\varkappa = -\dfrac{y'}{x'}\Big|_{t=0}$.

§ 3. Die Enveloppenbedingung

Nach § 5, 1. Teil ist, nun die Größe $\Delta(t,\varkappa) = \left|\dfrac{x'}{\partial\varkappa}, \dfrac{y'}{\partial\varkappa}\right|$ zu berechnen.

$$\Delta(t,\varkappa) = \mathfrak{Sin}^2\eta \begin{vmatrix} \sin\varkappa, & -\cos\varkappa \cdot \mathfrak{Cof}\,t + \mathfrak{Cotg}\,\eta \cdot \mathfrak{Sin}\,t \\ \cos\varkappa \cdot t, & \sin\varkappa \cdot \mathfrak{Sin}\,t \end{vmatrix}$$

Durch Nullsetzen resultiert die für alle weitern Untersuchungen grundlegende Beziehung

$$\boxed{\cos^2\varkappa \cdot \mathfrak{Cotg}\,\tau = \cos\varkappa \cdot \mathfrak{Cotg}\,\eta - \frac{\sin^2\varkappa}{\tau}} \tag{2}$$

§ 4. Zusammenhang von $\varkappa$ und τ

In (2) ersetzen wir $\sin^2\varkappa$ durch $1 - \cos^2\varkappa$, lösen die in Bezug auf $\cos\varkappa$ quadratische Gleichung und erhalten:

$$\cos\varkappa = \frac{2A}{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4A^2 \cdot \Phi(\tau)}} \tag{3a}$$

$$\cos\varkappa = \frac{2A}{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4A^2 \cdot \Phi(\tau)}} \tag{3b}$$

Es bedeuten:

$$A = \mathfrak{Tg}\,\eta; \quad \Phi(\tau) = \tau \cdot \mathfrak{Cotg}\,\tau - 1 \tag{4}$$

Zwecks Klarstellung des Zusammenhanges von $\varkappa$ und τ resp. von $\cos\varkappa$ und τ müssen verschiedene Vorfragen erledigt werden. Wir behaupten:

a) (2) besitzt zu jedem $\varkappa$ aus dem Intervall $1 \geq \cos\varkappa > 0$ genau eine positive Wurzel $t = \tau$.

Um dies einzusehen, betrachten wir beide Seiten von (2) als Funktionen von t und stellen sie graphisch dar.

b) **$R(\tau)$ besitzt höchstens eine positive Nullstelle $\tau = \tau_0$** [13]).

Mit $R(\tau)$ bezeichnen wir den Radikanden der Wurzel von (3a), (3b). Zum bequemeren Beweis der Behauptung wird $R(\tau)$ auf die Produktform

$$R(\tau) \equiv A^2 \tau^2 \left\{ \frac{1}{A^2} + 4\,\Psi(\tau) \right\}$$

mit $\Psi(\tau) \equiv \dfrac{1}{\tau^2} - \dfrac{\mathfrak{Cotg}\,\tau}{\tau}$ gebracht und $\Psi(\tau)$ diskutiert.

Die Randwerte von $\Psi(\tau)$ für $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ sind $-1/3$ und 0. Der zweite Wert kann direkt abgelesen werden; die Ermittlung des erstern erfordert nach der bekannten Regel viermalige Differentiation von Zähler und Nenner der auf den Nenner τ^2 gebrachten Funktion $\Psi(\tau)$. Gelingt uns noch der Nachweis der Monotonie, so kann durch elementare Schlüsse die Richtigkeit der Behauptung b) gefolgert werden. Dieser Nachweis wird folgendermaßen erbracht:

$$\Psi(\tau) \equiv \frac{1}{\tau^2} - \frac{\mathfrak{Cotg}\,\tau}{\tau}$$

$$\Psi'(\tau) \equiv -\frac{2}{\tau^3} + \frac{\mathfrak{Cof}\,\tau\,\mathfrak{Sin}\,\tau + \tau}{\tau^2 \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\tau} = \frac{-2\,\mathfrak{Sin}^2\,\tau + \tau\,\mathfrak{Cof}\,\tau\,\mathfrak{Sin}\,\tau + \tau^2}{\tau^2 \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\tau}$$

Der mit 4 multiplizierte Zähler werde $Z(\tau)$ genannt. Er bestimmt allein das Vorzeichen von $\Psi'(\tau)$.

---

[13]) Ob diese Nullstelle tatsächlich auftritt, hängt von A und somit von Lage des Knotenpunktes ab (vergleiche 4).

Es folgt:

$$\begin{aligned} Z(\tau) &\equiv 4\tau \cdot \mathfrak{Cof}\,\tau\,\mathfrak{Sin}\,\tau - 4 \cdot 2\,\mathfrak{Sin}^2\tau + 4\tau^2 \\ &= 2\tau \cdot \mathfrak{Sin}\,(2\tau) - 4\,[\mathfrak{Cof}\,(2\tau) - 1] + (2\tau)^2 \end{aligned}$$

und mit $2\tau = T$ weiter

$$Z(T) \equiv T \cdot \mathfrak{Sin}\,T - 4\,\mathfrak{Cof}\,T + T^2 + 4$$

Nun bilden wir die aufeinanderfolgenden Ableitungen von $Z(T)$ nach T:

$$\begin{aligned} Z^I(T) &= T \cdot \mathfrak{Cof}\,T - 3\,\mathfrak{Sin}\,T + 2T; & Z^I(o) &= 0 \\ Z^{II}(T) &= T \cdot \mathfrak{Sin}\,T - 2\,\mathfrak{Cof}\,T + 2; & Z^{II}(o) &= 0 \\ Z^{III}(T) &= T \cdot \mathfrak{Cof}\,T - \mathfrak{Sin}\,T; & Z^{III}(o) &= 0 \\ Z^{IV}(T) &= T \cdot \mathfrak{Sin}\,T > 0 \text{ für } T > 0! \end{aligned}$$

Das Verschwinden der Anfangswerte für $T = 0$ gestattet die gewünschte Vorzeichenbestimmung:

$$\begin{aligned} Z^{III}(T) &= \int_0^T Z^{IV}(x)\,dx > 0 \\ Z^{II}(T) &= \int_0^T Z^{III}(x)\,dx > 0 \\ Z^I(T) &= \int_0^T Z^{II}(x)\,dx > 0 \\ Z(T) &= \int_0^T Z^I(x)\,dx > 0 \quad \text{für } T > 0 \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Nun ist aber ohne weiteres zu erkennen, daß die Funktion $R(\tau)$ von der Stelle $\tau = \tau_0$ an sicher mit τ monoton zunimmt[14]).

c) (2) entnimmt man die beiden Wertepaare

$$\begin{aligned} \cos\varkappa &= 1; & \tau &= \eta \\ \cos\varkappa &= 0; & \tau &= \infty \end{aligned}$$

Gemäß (3a), (3b) muß also gelten:

$$1 = \frac{2A}{\eta \pm \sqrt{(2\,\mathfrak{Tg}\,\eta - \eta)^2}}$$

[14]) Vollständige Analyse von $R(\tau)$ ist durchaus möglich, in diesem Zusammenhang aber unnötig!

Das Vorzeichen des Ausdrucks $2\,\mathfrak{Tg}\,\eta - \eta$ induziert das Vorzeichen der Wurzel, und wir müssen fortan die Fälle

$$\eta < 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta, \quad \eta = 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta, \quad \eta > 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$$

unterscheiden [15]).

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die Funktion $\tau = \tau(\varkappa)$ zu überblicken. Wir beginnen mit dem Fall $\eta < 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$. Es gilt:

Sinkt $\cos\varkappa$ monoton von 1 auf 0, so wächst τ monoton von η auf ∞.

Beweis: In der rechten Seite von (3a) lassen wir τ monoton von η auf ∞ wachsen.

Wegen $R(\eta) = (\eta - 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta)^2 > 0$ und $R(\infty) = +\infty$ sowie nach (4) ist die rechte Seite von (3a) eine reelle, eindeutige und stetige Funktion von τ mit den Randwerten 1 und 0, die wegen (2) monoton sein muß. Also hat sie eine eindeutige und monotone Umkehrung. w. z. b. w.

Im ganzen Intervall gilt deshalb:

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} \gtrless 0 \tag{5}$$

Der Fall $\eta > 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$ ist wesentlich komplizierter. $R(\tau)$ besitzt jetzt eine positive Nullstelle $\tau = \tau_0$, welche der Bedingung $2\,\mathfrak{Tg}\,\eta < \tau_0 < \eta$ genügt. Der Beweis hierfür stützt sich auf die oben bewiesene Behauptung über die Funktion $R(\tau)$ sowie auf

$$R(\eta) = (\eta - 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta)^2 > 0$$

$$R(2\,\mathfrak{Tg}\,\eta) = 8\,\mathfrak{Tg}^2\eta\left\{1 - \frac{\mathfrak{Tg}\,\eta}{\mathfrak{Tg}\,(2\,\mathfrak{Tg}\,\eta)}\right\} < 0$$

Es gilt:

Sinkt $\cos\varkappa$ monoton von 1 auf den gemäß $2\,\mathfrak{Tg}\,\eta < \tau_0 < \eta$ existierenden Wert $\cos\varkappa_0 = \dfrac{2\,\mathfrak{Tg}\,\eta}{\tau_0} < 1$, so sinkt τ monoton von η auf τ_0.

Beweis: Wir betrachten die rechte Seite von (3b) im Intervall $\eta \geq \tau \geq \tau_0$ als Funktion von τ. Sie ist reell, eindeutig und

[15]) Dies bedeutet, daß die Lage des Knotenpunktes wesentlich ist (vergleiche Abb. 1).

stetig und besitzt die Randwerte 1 und $\cos \varkappa_0$. Wiederum muß sie wegen (2) monoton sein. Also ist auch die Umkehrung monoton[16]). Im ganzen Intervall gilt deshalb:

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} \leq 0 \qquad \text{w. z. b. w.} \tag{6}$$

Nun lassen wir $\cos \varkappa$ monoton von $\cos \varkappa_0$ auf 0 fallen und behaupten, daß dabei τ von τ_0 auf ∞ steigt.

Beweis: Man betrachtet die rechte Seite von (3a) im Intervall $\tau_0 \leq \tau < \infty$ als Funktion von τ. Sie ist reell, eindeutig und stetig und hat die Randwerte $\cos \varkappa_0$ und 0. Daher muß die schon früher als eindeutig erkannte Umkehrfunktion monoton sein. Im ganzen Intervall gilt wieder

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} \geq 0 \qquad \text{w. z. b. w.} \tag{7}$$

Weil der Fall $\eta = 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$ sich in leicht übersehbarer Weise an den Fall $\eta > 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$ anschließen läßt, ist damit der ganze Wertevorrat von (2) erschöpft.

§ 5. Die Enveloppe

Die Anwendung des Abbildungssatzes setzt eingehende Kenntnis der Enveloppe der Extremalenschar (1) voraus. Diese wichtige Kurve besitzt die Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \sin \varkappa \cdot \tau \\ y &= -\mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \cos \varkappa \cdot \mathfrak{Sin}\,\tau + \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \mathfrak{Cof}\,\tau \end{aligned}} \tag{8}$$

Aus rechnerischen Gründen kann man nicht gut das begrifflich naheliegende $\varkappa$ als Parameter wählen, sondern muß auf τ greifen[17]). Dasselbe ist dann gemäß den ermittelten Gesetzen folgendermaßen zu variieren:

---

[16]) Damit ist die direkte Diskussion von (3b) unnötig geworden!

[17]) Die daraus entstehenden Nachteile treten im Beispiel III deutlich in Erscheinung.

Im Falle $\eta < 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$: von η nach ∞.
Im Falle $\eta > 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$: zuerst von η rückwärts nach $\tau_0 < \eta$, dann von τ_0 nach ∞.

Unser Ziel besteht im Nachweis der Einfachheit der Enveloppe [18]). Bezeichnet man mit $\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right)$ die Tangente an die Enveloppe und mit $\begin{pmatrix} dx & dy \\ d\tau, & d\tau \end{pmatrix}$ die Tangente an die Extremale in demselben Punkte der Enveloppe, so gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \sin\varkappa \\ \frac{dy}{dt} &= -\mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \cos\varkappa \cdot \mathfrak{Cof}\,\tau + \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \mathfrak{Sin}\,\tau \end{aligned}} \tag{9}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \left(1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}\right)\frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left(1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}\right)\frac{dy}{dt} \end{aligned}} \tag{9a}$$

Wegen (2) kann (9) in Produktform geschrieben werden:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \sin\varkappa \\ \frac{dy}{dt} &= \mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \sin\varkappa \cdot \operatorname{tg}\varkappa \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\tau}{\tau} \end{aligned}} \tag{9b}$$

Aus Symmetriegründen wird die Diskussion auf $0 \leq \varkappa \leq \pi/2$ beschränkt.

Zunächst sieht man, daß $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ für $\varkappa \neq 0$ positiv sind. Das Vorzeichen von $\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right)$ hängt also lediglich vom Ausdruck $1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}$ ab.

In allen Fällen mit $\frac{d\varkappa}{d\tau} \geq 0$ sind $\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right)$ nie negativ, und x sowie y nehmen mit wachsendem τ nie ab. Im Falle $\eta < 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$

[18]) Im Sinne der geometrischen Mengenlehre.

ist somit die Einfachheit der ganzen Enveloppe, im Falle $\eta > 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$ die Einfachheit eines Teilbogens mit $\cos\varkappa_0 \geq \cos\varkappa > 0$, $\tau_0 \leq \tau < \infty$ erwiesen.

Ist aber $\dfrac{d\varkappa}{d\tau} < 0$, so muß der Ausdruck $1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \dfrac{d\varkappa}{d\tau}$ als Funktion von τ berechnet werden. Unter Berücksichtigung von (3b), (4) findet man:

$$\sin\varkappa = \frac{\sqrt{(\tau - \sqrt{\ })^2 - 4A^2}}{\tau - \sqrt{\ }}; \quad \frac{d\varkappa}{d\tau} = -\frac{1}{\sin\varkappa} \cdot \frac{d}{d\tau}\left(\frac{2A}{\tau - \sqrt{\ }}\right)$$

$$1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau} =$$

$$-\frac{4\{2A^4(2\Phi - \Phi'\cdot\tau) + (\tau^2 - A^2\cdot\Phi)(\tau^2 - 4A^2\cdot\Phi) - \tau(\tau^2 - 3A^2\cdot\Phi)\sqrt{\ }\}}{\sqrt{\ }\,(\tau - \sqrt{\ })\,[(\tau - \sqrt{\ })^2 - 4A^2]} \tag{10}$$

Eine Diskussion erscheint ohne Vereinfachungen aussichtslos. Nun gilt:

Für alle $\tau > 0$: $\quad \Phi(\tau) > 0$

$$2\Phi - \tau \cdot \frac{d\Phi}{d\tau} > 0 \text{ (Aus (4) berechnet!)} \tag{11}$$

Für $\eta > \tau > 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$: $\quad \tau - \sqrt{\ } > 2A,$

also auch: $(\tau - \sqrt{\ })^2 - 4A^2 > 0$ (12)

Wegen $\eta > \tau_0 > 2\,\mathfrak{Tg}\,\eta$ gilt (12) auch im betrachteten Intervall.

Wir behaupten: $1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \dfrac{d\varkappa}{d\tau}$ ist im betrachteten Intervall negativ.

Dank der getroffenen Vorbereitungen ist eine viel bequemere Fassung möglich. Da nämlich der zu { } in (10) konjugierte Ausdruck { }* positiv ist, genügt es, das positive Zeichen des Ausdruckes

$$T \equiv \frac{\{\,\}\cdot\{\,\}^*}{4A^4} = \left[\left(2\Phi - \tau\cdot\frac{d\Phi}{d\tau}\right)^2 + 4\left(2\Phi - \tau\cdot\frac{d\Phi}{d\tau}\right)\Phi^2 + 4\Phi^4\right]A^4$$

$$-\left[5\Phi\left(2\Phi - \tau\cdot\frac{d\Phi}{d\tau}\right) + \Phi^3\right]\tau^2A^2$$

$$+\tau^4\left(2\Phi - \tau\cdot\frac{d\Phi}{d\tau}\right)$$

nachzuweisen.

Unter Verwendung der Abkürzung

$$2\Phi - \tau \cdot \frac{d\Phi}{d\tau} \equiv X \tag{13}$$

modifiziert sich unsere Behauptung in

$$T \equiv (X + 2\Phi^2)^2 A^4 - (5X + \Phi^2)\Phi \cdot \tau^2 \cdot A^2 + X\tau^4 > 0 \tag{14}$$

für alle $\tau > 0$.

Trotz erfolgter Rationalisierung ist der Beweis noch nicht zu erbringen. Hier hilft die folgende Idee weiter:

Würde (14) τ nicht explizit enthalten, so könnten wir in einer (X, Φ)-Ebene operieren.

Ob es wohl gelingt, durch Wahl passender Hilfsfunktionen (14) von τ zu befreien? Ja; denn mit

$$\omega(\tau) = \frac{\tau^2}{\Phi(\tau)}; \quad \Omega(\tau) = \frac{[\Phi(\tau)]^2}{X(\tau)} \tag{15}$$

folgt:

$$T \equiv A^4 X^2 \left\{ \Omega \left(\frac{\omega}{A^2} \right)^2 - \Omega(\Omega + 5) \frac{\omega}{A^2} + (2\Omega + 1)^2 \right\} \tag{16}$$

Wegen (13) und (11) tritt daher an Stelle von (14) die Behauptung:

$$\boxed{V \equiv \Omega \left(\frac{\omega}{A^2} \right)^2 - \Omega(\Omega + 5) \frac{\omega}{A^2} + (2\Omega + 1)^2 > 0} \tag{17}$$

Unser modifiziertes Beweisverfahren besteht nun darin, daß wir in einer (Ω, ω)-Ebene[19]) die Kurven $V > 0$ bestimmen und nachweisen, daß die Kurve (15) ganz im Gebiet $V > 0$ verläuft.

Durch Auflösung von (17) nach $\frac{\omega}{A^2}$ erhält man:

$$\omega = \frac{A^2}{2} \left[\Omega + 5 \pm (\Omega - 1) \sqrt{1 - \frac{4}{\Omega}} \right] \tag{18}$$

Die obgenannten Kurven zerfallen demnach in 2 verschiedene Äste mit $\Omega \leq 0$ bez. $\Omega \geq 4$. Wegen $\Omega(\tau) > 0$ (Vergleiche (15), (13) und (11)) braucht nur der Fall $\Omega \geq 4$ berücksichtigt zu werden.

[19]) (Ω, ω) = Koordinaten!

Die einparametrige Kurvenschar (18) ist leicht zu diskutieren:

a) Zunächst stellt man mühelos die beiden Asymptoten $\omega = A^2\,(\Omega + 1)$ und $\omega = 4\,A^2$ sowie den Kurvenpunkt

$$B(4,\ 4^1/_2\,A^2) \quad \text{fest.} \tag{18a}$$

b)
$$\frac{d\,\omega}{d\,\Omega} = \frac{A^2}{2}\left\{1 \pm \frac{(\Omega^2 - 2\,\Omega - 2)}{\Omega^2\sqrt{1 - \frac{4}{\Omega}}}\right\} \tag{18b}$$

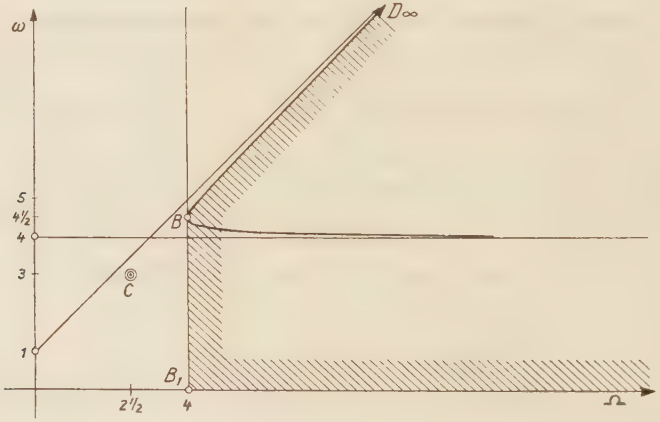
Es folgt für die Asymptotenrichtung, wie es sein muß:

$$\left.\frac{d\,\omega}{d\,\Omega}\right|_{\Omega = \infty} = A^2 \quad \text{resp.} \quad \left.\frac{d\,\omega}{d\,\Omega}\right|_{\Omega = \infty} = 0$$

c)
$$\frac{d^2\,\omega}{d\,\Omega^2} = \mp\,\frac{6\,A^2}{\Omega^3\,(\Omega - 4)\sqrt{1 - \frac{4}{\Omega}}} \tag{18c}$$

Alle aufsteigenden Kurvenäste sind konkav, die absteigenden konvex. Weil Wendestellen fehlen, können die Asymptoten nicht überschritten werden.

In der Abb. 2 ist nur die Kurve $A^2 = 1$ als Grenzkurve entworfen.



Aus (18) entnimmt man sofort, daß für $0 < A^2 < 1$ alle Kurven $V = 0$ dem schraffierten Bereich angehören. Dies hat zur Folge, daß man zeigen muß, daß die Kurve $\Omega\,(\tau)$, $\omega\,(\tau)$ die ge-

brochene Linie B_1BD_∞ nicht trifft und einen nichtisolierten Punkt außerhalb des schraffierten Bereiches besitzt.

Zwecks Diskussion dieser Kurve braucht man ihre explizite Parameterdarstellung.

Aus (4), (13) und (15) folgt sukzessive:

$$\Phi = \frac{(\tau - 1)\, e^{2\tau} + \tau + 1}{e^{2\tau} - 1} \tag{19}$$

$$X = \frac{(\tau - 2)\, e^{4\tau} + 4(\tau^2 + 1)\, e^{2\tau} - (\tau + 2)}{(e^{2\tau} - 1)^2} \tag{20}$$

$$\Omega = \frac{(\tau - 1)^2\, e^{4\tau} + 2(\tau^2 - 1)\, e^{2\tau} + (\tau + 1)^2}{(\tau - 2)\, e^{4\tau} + 4(\tau^2 + 1)\, e^{2\tau} - (\tau + 2)} \tag{21}$$

$$\omega = \frac{\tau^2 (e^{2\tau} - 1)}{(\tau - 1)\, e^{2\tau} + (\tau + 1)} \tag{22}$$

Abb. 2 lehrt, daß es nicht genügt, nachzuweisen, daß unsere Kurve die Linie $V_{A^2-1} = 0$ nicht trifft; denn der schraffierte Bereich kann auch durch Überschreiten der Strecke B_1B erreicht werden. Dieser Umstand zwingt zu einer genaueren Diskussion der Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega)\tau)$. Angesichts des komplizierten Baues von (21) muß man zu Kunstgriffen Zuflucht nehmen. Wir beweisen:

a) Die Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ hat die Asymptote $\omega = \Omega + 1$.
b) Sie trifft die Gerade $\Omega = 4$ genau einmal.
c) Sie trifft die Kurve $V_{A^2=1}$ nicht.

Der Beweis von a) ist elementar. In (21), (22) werden nur die Glieder höchster Dimension beibehalten. Es folgt:

$$\tau \to \infty \qquad \omega \sim \frac{\tau^2}{\tau - 1} = \tau + \frac{\tau}{\tau - 1} \sim \tau + 1$$

$$\Omega \sim \frac{\tau^2 - 2\tau + 1}{\tau - 2} = \tau + \frac{1}{\tau - 2} \sim \tau$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \tau + 1 \\ \Omega = \tau \end{array}\right\} \to \omega = \Omega + 1$$

b) wird durch den Nachweis der Monotonie von $\Omega(\tau)$ sichergestellt, was schwieriger ist. Wir benötigen folgende Relationen:

$$X \equiv \Phi^2 + 3\Phi - \tau^2 \tag{23}$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau}{\Omega} \tag{20}$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{\Omega}{\tau}(2\omega - 2\Omega - 1) \tag{25}$$

(23) wird errechnet aus (4) und (13).
(24) aus (13) und (15).
(25) liegt versteckter:

$$\Omega = \frac{\Phi^2}{X} = \frac{\Phi^2}{\Phi^2 + 3\Phi - \tau^2} = \frac{1}{1 + \frac{3}{\Phi} - \frac{\tau^2}{\Phi^2}}$$

$$= \frac{\tau^2}{\tau^2 + 3\cdot\frac{\tau^2}{\Phi} - \left(\frac{\tau^2}{\Phi}\right)^2} = \frac{\tau^2}{\tau^2 + 3\omega - \omega^2}$$

also:

$$\frac{1}{\Omega}\cdot\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{2}{\tau} - \frac{2\tau + (3 - 2\omega)\frac{d\omega}{d\tau}}{\tau^2 + 3\omega - \omega^2}$$

$$= \frac{2}{\tau} - \Omega\left(\frac{2}{\tau} + \frac{3 - 2\omega}{\tau}\cdot\frac{1}{\Omega}\right)$$

$$= \frac{1}{\tau}(2 - 2\Omega - 3 + 2\omega)$$

$$\frac{1}{\Omega}\cdot\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{2\omega - 2\Omega - 1}{\tau}$$

w. z. b. w.

Ferner erhalten wir:

$\lim_{\tau=0}(2\omega - 2\Omega - 1) = 0$ (Reihen für $\tau = 0$)

$\lim_{\tau\to\infty}(2\omega - 2\Omega - 1) = 1$ (Aus der Asymptotengleichung errechnet!)

Wäre nun einmal $2\omega - 2\Omega - 1 < 0$, so besäße der Ausdruck ein negatives Minimum, für welches natürlich gelten müßte:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{d\Omega}{d\tau}$$

Dann ergäbe sich aber aus (24) und (25) ein Vorzeichenwiderspruch. w. z. b. w.

c) Die Reihenentwicklung von Ω und ω liefert:

$$\lim_{\tau=0} \Omega = 2^1/_2$$
$$\lim_{\tau=0} \omega = 3 \qquad (26)$$

Es gibt also einen offenbar nichtisolierten Punkt im Außengebiet der Kurven $V = 0$.

Nun werden (21), (22) in (17) eingesetzt, und man erhält:

$$V_{A^2=1} = 4e^{2\tau} \cdot \tau^2 \cdot \left\{ \frac{(\tau^4-6\tau^3+15\tau^2-18\tau+9)e^{4\tau}-2(\tau^4-3\tau^2+9)e^{2\tau}+(\tau^4+6\tau^3+15\tau^2+18\tau+9)}{[(\tau-2)e^{4\tau}+4(\tau^2+1)e^{2\tau}-(\tau+2)]^2} \right\}$$

Die Vorzeichenbestimmung des Zählers erscheint schwierig. Man kann sich aber einen günstigen Umstand zunutze machen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \tau^4 - 6\tau^3 + 15\tau^2 - 18\tau + 9 &\equiv (\tau^2 - 3\tau + 3)^2 \\ \tau^4 \qquad - 3\tau^2 \qquad + 9 &\equiv (\tau^2 - 3\tau + 3)(\tau^2 + 3\tau + 3) \\ \tau^4 + 6\tau^3 + 15\tau^2 + 18\tau + 9 &\equiv (\tau^2 + 3\tau + 3)^2 \end{aligned}$$

so daß man schreiben darf:

$$V_{A^2=1} \equiv \left\{ 2\tau \cdot e^{\tau} \cdot \left[\frac{(\tau^2 - 3\tau + 3)e^{2\tau} - (\tau^2 + 3\tau + 3)}{(\tau - 2)e^{4\tau} + 4(\tau^2 + 1)e^{2\tau} - (\tau + 2)} \right] \right\}^2 \qquad (27)$$

An der kritischen Stelle $\tau = 0$ findet man am bequemsten aus (21) und (26):

$$V_{A^2=1}/_{\tau=0} = (^3/_2)^2 > 0$$

Im übrigen ist der Nenner von (27) durchwegs $\neq 0$ (vergleiche (11), (13) und (20). Wir zeigen ferner, daß der Zähler beständig > 0 ist.

Nennen wir den Zähler von (27) $G(\tau)$, so folgt:

$$G(o) = 0; \quad G^I(o) = 0; \quad G^{II}(o) = 0$$
$$G^{III}(\tau) \equiv 8\tau^2 \cdot e^{2\tau} > 0 \qquad \text{für} \quad \tau > 0.$$

$$G^{II}(\tau) = \int_0^\tau G^{III}(x)\,dx > 0$$

$$G^{I}(\tau) = \int_0^\tau G^{II}(x)\,dx > 0$$

$$G(\tau) = \int_0^\tau G^{I}(x)\,dx > 0 \qquad \text{für} \quad \tau > 0.$$

$V_{A^2\ 1}$ ist mithin positiv definit, und die Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ verläuft ganz auf der durch den Anfangspunkt C vorgegebenen Seite des schraffierten Bereiches der Abb. 2.

Nach diesem ausführlichen Exkurs knüpfen wir an die begonnene Enveloppendiskussion an. Durch Vermittlung von (10) folgt nämlich, daß der Ausdruck $1 - \tau \cdot \operatorname{cotg} \tau \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}$ im ganzen Intervall $\tau_0 \leq \tau \leq \eta$ negativ ist. Im Intervall $\tau_0 \leq \tau < \eta$ gilt dasselbe für die Komponenten der Tangente, $\frac{dx}{d\tau}$ und $\frac{dy}{d\tau} \cdot x$ und y wachsen also mit fallendem τ monoton von (0,1) auf das Wertepaar $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, und der zugehörige Enveloppenbogen ist einfach.

Wir haben seinerzeit $\varkappa = 0$ ausgeschlossen. Eine durchaus elementare, aber etwas langwierige und darum wegzulassende Rechnung ergibt die für alle Fälle gültigen Resultate:

$$\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\varkappa=0} = +\infty; \quad \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\varkappa=0} > 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{\varkappa=0 \\ \tau=\eta}} = 0$$

Die betrachtete Stelle ist mithin ungefährlich.

Indem man jetzt alle Lagen des Knotenpunktes zusammenfaßt und statt τ den Winkel $\varkappa$ als Parameter benutzt, gelangt man zum Ergebnis:

Wächst $\varkappa$ von 0 auf $\pi/2$, so wachsen $(\varkappa, y)$ monoton von (0,1) auf $(+\infty, +\infty)$.

Die Enveloppe ist also einfach. (28)

Es wäre nicht leicht, zu entscheiden, ob diese Kurve etwa Wendestellen besitzt; bei unserer Problemstellung macht dies glücklicherweise nichts aus! (Vergleiche den Abbildungssatz!)

§ 6. Anwendung des Abbildungssatzes

Der Abbildungssatz, auf das vorliegende Beispiel angewendet, kann etwa folgendermaßen formuliert werden:

Die Gleichungen

$$x = \mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \sin\varkappa \cdot t$$
$$y = -\mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \cos\varkappa \cdot \mathfrak{Sin}\,t + \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \mathfrak{Cof}\,t$$

haben für jedes (x, y) $(0, \mathfrak{Cof}\,\eta)$ aus $\overline{G}$ genau eine Lösung im Parametergebiet

$$\begin{aligned} \varkappa &< \pi/2; \qquad 0 < t < \tau \\ \pi/2 \leq \varkappa &< \pi; \qquad 0 < t < \infty \end{aligned}$$

Es ist nachzuprüfen, ob sämtliche Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

Das Bestehen von 1 folgt sofort aus (1) und § 4, a), 2. Teil.

$\Delta(t, \varkappa)$ verschwindet für $t = 0$. Durch Einführung „kartesischer Parameter"

$$\begin{aligned} \xi &= \sin\varkappa \cdot t \\ \eta &= -\cos\varkappa \cdot t \end{aligned} \tag{29}$$

wird diese Singularität beseitigt, und 2 ist erfüllt[20]).

Der Rand C von G ist definiert durch

$$\varkappa < \pi/2; \qquad t = \tau$$

und (29). Sein Bild ist die Enveloppe E. Es sei nun $\overline{P}$ ein Punkt von E. In jeder Umgebung von $\overline{P}$ hat es Bildpunkte von G. Wäre also $\overline{P}$ kein Randpunkt des Bildes, so müßte er ein innerer Punkt sein. Dann gäbe es aber Bildpunkte $\overline{Q}$, die außerhalb $\overline{G}$ liegen. Außerhalb $\overline{G}$ gibt es aber sicher Punkte, die keine Bildpunkte sind (z. B. alle Punkte mit $y < 1$). Infolge der Einfachheit von E, die im § 5 bewiesen wurde, liegen alle Punkte außerhalb von $\overline{G}$ im selben Restgebiet von E. Also müßte es außerhalb $\overline{G}$ auch Randpunkte des Bildes geben, die nicht zu E gehören. Nun aber beweisen wir:

Jeder Randpunkt $\overline{R}$ des Bildes liegt auf E. Es sei $(\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n) = (\overline{P}_n)$ eine gegen $\overline{R}$ konvergierende Bildfolge und $(P_1, P_2 \ldots P_2)$ (P_n) eine zugehörige Originalfolge. Wegen der Beschränktheit von $(\overline{P}_n)$, die laut Definition die Beschränktheit von y nach sich zieht, kann man der aus (1) folgen-

[20]) $\dfrac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial(t, \varkappa)} = t$!

den Beziehung $y \geq \mathfrak{Cof}(x - \eta)$ entnehmen, daß auch t und somit (P_n) beschränkt bleiben. Es sei P ein Häufungspunkt von (P_n). Kraft der Gültigkeit von Voraussetzung 1 ist $\bar{R}$ das Bild von P. Also muß P ein Randpunkt von G sein, und daher ist $\bar{R}$ ein Punkt von E. Voraussetzung 3 ist demnach erfüllt [21]).

Es ist leicht einzusehen, daß auch 4 besteht. Die Rollen der Punkte (x_0, y_0) und $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ spielen die Punkte

$$(\xi, \eta) = (0, 0) \quad \text{und} \quad (x, y) = (0, \mathfrak{Cof}\, \eta).$$

Damit ist der Nachweis erbracht, daß das Randwertproblem für alle von P verschiedenen innern Punkte von $\bar{G}$ genau eine Lösung besitzt. Die Verhältnisse liegen also gleich wie beim Beispiel der Rotationsfläche kleinster Oberfläche.

II. $F = \sqrt{(1 - y^2)(x'^2 + y'^2)}$

§ 1. Existenzgebiet des Problems

Eine kleine Abänderung der Grundfunktion liefert die natürliche Ergänzung zu Beispiel I. An die Stelle der abgeschlossenen Halbebene $y \geq 1$ tritt der abgeschlossene, achsenparallele Streifen $-1 \leq y \leq -1$.

§ 2. Extremalen und ausgezeichnete Extremalenschar

Es gilt jetzt:

$$x' = \xi \qquad y' = \pm \sqrt{1 - k^2 - y^2}$$

Die allgemeine Lage des Knotenpunktes wird dargestellt durch $P = P(0, y_0)$ mit $|y_0| < 1$. Spezialisation mit $y_0 = 0$ ist sinnvoll. Die Integration liefert:

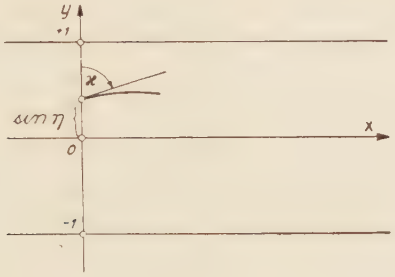
$$x = \xi t \qquad y = y_0 \cos t \pm \sqrt{1 - y_0^2 - k^2}\, \sin t$$

t_0 hat wieder den Wert 0.

---

[21]) Für die Beispiele II und III wird dieser Teilbeweis sehr abgekürzt, da es sich um Wiederholungen handelt.

Mühelos wird die Wurzel weggebracht (Abb. 3):



$$y_0 = \sin \eta$$
$$k = \cos \eta \cdot \sin \varkappa$$
$$1 - y_0^2 - k^2 = \cos \eta \cdot \cos \varkappa$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos \eta \cdot \sin \varkappa \cdot t \\ y &= \cos \eta \cdot \cos \varkappa \cdot \sin t + \sin \eta \cdot \cos t \end{aligned}} \tag{1}$$

Aus Symmetriegründen beschränkt man sich auf die Intervalle

$$0 \leq \eta < \pi/2, \qquad 0 \leq \varkappa \leq \pi.$$

§ 3. Die Enveloppenbedingung

Man wertet die Größe $\Delta(t, \varkappa)$ aus, setzt sie gleich Null und erhält:

$$\boxed{\cos^2 \varkappa \cdot \operatorname{cotg} \tau = \cos \varkappa \cdot \operatorname{tg} \eta - \frac{\sin^2 \varkappa}{\tau}} \tag{2}$$

§ 4. Zusammenhang von $\varkappa$ und τ

(2), nach $\cos \varkappa$ aufgelöst, liefert:

$$\boxed{\cos \varkappa = \frac{2B}{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4B^2 \cdot \Phi(\tau)}}} \tag{3a}$$

$$\boxed{\cos \varkappa = \frac{2B}{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4B^2 \cdot \Phi(\tau)}}} \tag{3b}$$

Es bedeuten:

$$B = \operatorname{cotg} \eta; \qquad \Phi(\tau) = \tau \cdot \operatorname{cotg} \tau - 1 \tag{4}$$

Die Vorfragen erfordern hier einen viel kleineren Aufwand.

a) Aus (2) kann gefolgert werden, daß für alle Werte von $\varkappa$ eine und nur eine Wurzel τ aus dem Intervall $0 < \tau \leq \pi$ existiert.

b) Wegen $R'(\tau) = 2\tau + \dfrac{4B^2(2\tau - \sin 2\tau)}{2\sin^2\tau}$ wächst $R(\tau)$, der Radikand der Wurzel in (3a), (3b) im Intervall $0 \leq \tau \leq \pi$ monoton von 0 bis ∞.

c) (2) entnimmt man die 3 Wertepaare

$$\begin{aligned} \cos\varkappa &= +1; \quad & \tau &= \pi/2 - \eta \\ \cos\varkappa &= 0; \quad & \tau &= \pi \\ \cos\varkappa &= -1; \quad & \tau &= \pi/2 + \eta \end{aligned}$$

Gemäß (3a), (3b) muß also gelten:

$$1 = \frac{2B}{\pi/2 - \eta \pm \sqrt{(\pi/2-\eta)^2 - 4B^2[(\pi/2-\eta)\operatorname{tg}\eta - 1]}}$$

$$-1 = \frac{2B}{\pi/2 + \eta \pm \sqrt{(\pi/2+\eta)^2 - 4B^2[(\pi/2+\eta)\cdot -\operatorname{tg}\eta - 1]}}$$

Im ersten Fall ist der Radikand das vollständige Quadrat $(\pi 2 - \eta - 2B)^2$ mit der positiven Wurzel $2B - (\pi 2 - \eta)$[22]), weshalb das positive Vorzeichen zu nehmen ist. Im zweiten Fall aber handelt es sich um das vollständige Quadrat $(\pi 2 - \eta - 2B)^2$ mit der positiven Wurzel $2B - \pi 2 - \eta$, und nur das negative Vorzeichen erteilt der linken Seite den vorgeschriebenen Wert -1. Der Zusammenschluß der beiden Fälle erfolgt an der Stelle $\tau = \pi$. Man erhält beide Male $\cos\varkappa = 0$.

Nun sind wir wieder imstande, die Funktion $\tau = \tau(\varkappa)$ zu überblicken. Es gilt:

Sinkt $\cos\varkappa$ monoton von 1 auf 0, so steigt τ monoton von $\pi/2 - \eta$ auf π.

Beweis: Wir betrachten die rechte Seite von (3a) als Funktion von τ. Sie ist reell, eindeutig und stetig und besitzt die Randwerte 1 und 0. Wegen (2) ist sie monoton; also besitzt sie eine eindeutige und monotone Umkehrung.

---

[22]) Analyse von $2\operatorname{cotg}\eta + \eta - \pi/2$.

Im ganzen Intervall gilt dann:

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} \geq 0 \qquad \text{w. z. b. w.} \qquad (5)$$

Sinkt $\cos\varkappa$ monoton von 0 auf -1, so sinkt τ monoton von π auf $\pi/2+\eta$.

Beweis: Die rechte Seite von (3b), als Funktion von τ betrachtet, ist reell, eindeutig und stetig und besitzt die Randwerte 0 und -1. Wiederum ist die Monotonie, welche direkt nicht leicht nachzuweisen wäre, wegen (2) gesichert[23]). Also ist die Umkehrfunktion eindeutig und monoton.

Im ganzen Intervall gilt:

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} \leq 0 \qquad \text{w. z. b. w.} \qquad (6)$$

Damit ist der ganze Wertvorrat von (2) erschöpft.

§ 5. Die Enveloppe

Mit sehr viel geringerem Aufwand als im Beispiel I gelingt hier die Diskussion dieser so wichtigen Kurve. Ihre Gleichung lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos\iota \cdot \sin\varkappa \cdot \tau \\ y &= \cos\eta \cdot \cos\varkappa \cdot \sin\tau + \sin\eta \cdot \cos\tau \end{aligned}} \qquad (7)$$

Unter Verwendung von (2) erhält man:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos\iota \cdot \sin\varkappa \\ \frac{dy}{dt} &= -\cos\eta \cdot \frac{\sin^2\varkappa}{\cos\varkappa} \cdot \frac{\sin\tau}{\tau} \end{aligned}} \qquad (8)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \left(1+\tau\cdot\operatorname{cotg}\varkappa\cdot\frac{d\varkappa}{d\tau}\right)\frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left(1+\tau\cdot\operatorname{cotg}\varkappa\cdot\frac{d\varkappa}{d\tau}\right)\frac{dy}{dt} \end{aligned}} \qquad (8a)$$

[23]) Die Differenz zweier monotoner Funktionen ist nicht notwendig monoton!

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\varkappa \cdot \frac{\sin\tau}{\tau} \tag{9}$$

Aus (5) und (6) schließen wir, daß $\operatorname{cotg}\varkappa$ und $\frac{d\varkappa}{d\tau}$ in den betrachteten Intervallen gleiches Vorzeichen besitzen. Da zudem τ immer positiv ist, so wird das Vorzeichen von $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ schon durch $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ bestimmt. Es folgt:

Im offenen Intervall $0 < \varkappa < \pi\ 2$ ist $\frac{dx}{d\tau}$ positiv, $\frac{dy}{d\tau}$ negativ.

Im offenen Intervall $\pi\ 2 < \varkappa < \pi$ sind $\frac{dx}{d\tau}$ und $\frac{dx}{d\tau}$ positiv.

Eine elementare, aber umständliche Rechnung liefert ferner:

$$\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\varkappa=0} = +\infty; \qquad \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\varkappa=0} < 0$$

$$\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\varkappa=\pi} = +\infty; \qquad \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\varkappa=\pi} > 0$$

$$\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\varkappa=\pi/2} = \cos\eta \neq 0; \quad \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\varkappa=\pi/2} = 0$$

Nimmt man noch (1) dazu, so sind folgende Ergebnisse gesichert:

Durchläuft τ das Intervall $\pi/2 - \eta < \tau \leq \pi$, so gehen x und y monoton von (0,1) nach $(\pi\cos\eta, \ -\sin\eta)$.

Durchläuft aber τ das Intervall $\pi/2 + \eta \leq \tau \leq \pi$, so gehen x und y monoton von (0,—1) nach $(\pi\cos\eta, \ -\sin\eta)$.

Damit haben wir festgestellt, daß die Enveloppe aus zwei einfachen, einander nicht treffenden Bögen besteht, die sich im Punkte $(\pi\cos\eta, \ -\sin\eta)$ zu einer gestaltlichen Spitze schließen [24]). Aus (9) kann man noch folgern, daß die Enveloppe in jedem der betrachteten Intervalle mindestens 1 Wendestelle besitzt. Genauere Daten werden nicht benötigt (vergleiche Abb. 4).

---

[21]) Die Betrachtung von $\frac{dx}{d\varkappa}, \frac{dy}{d\varkappa}$ lehrt, daß die Stelle analytisch keine Spitze ist!

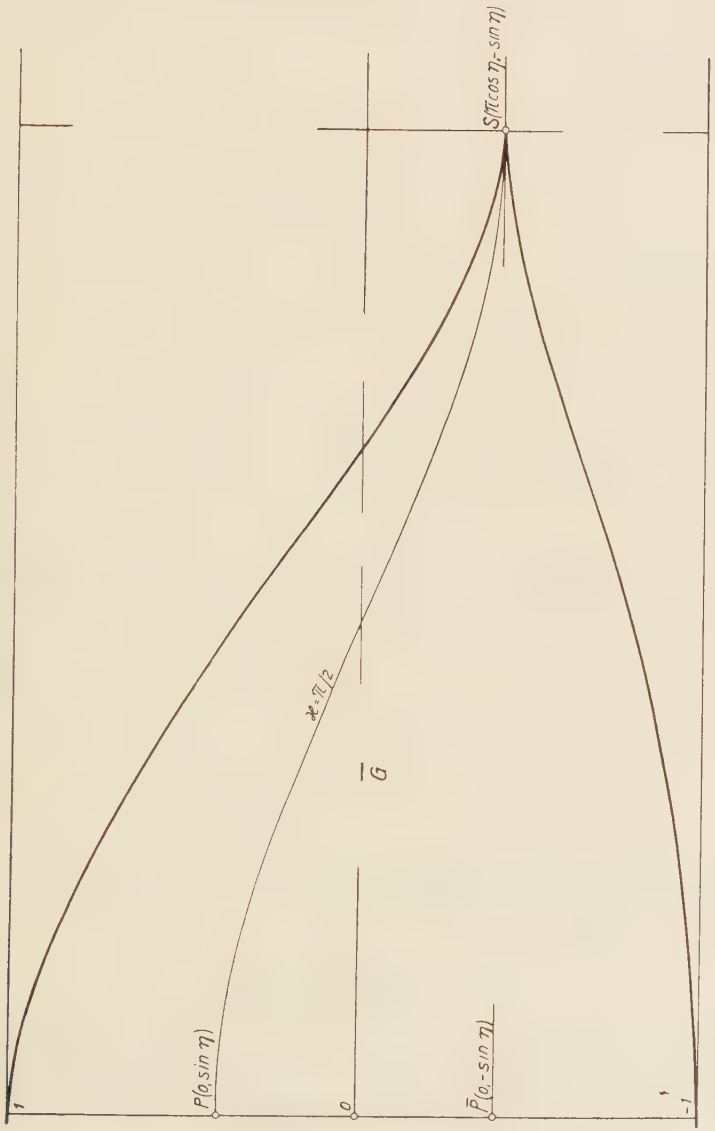


Abb. 4. (sin $\eta = 0{,}4$).

§ 6. Anwendung des Abbildungssatzes

Auf das Beispiel II angewendet, lautet der Abbildungssatz folgendermaßen:

Die Gleichungen

$$x = \cos\eta \cdot \sin\varkappa \cdot t$$
$$y = \cos\eta \cdot \cos\varkappa \cdot \sin t + \sin\eta \cdot \cos t$$

haben für jedes $(x, y) = (0, \sin\eta)$ aus $\bar{G}$ genau eine Lösung im Parametergebiet

$$\varkappa \leq \pi/2; \qquad 0 < t < \tau.$$
$$\pi/2 \leq |\varkappa| \leq \pi; \qquad 0 < t < \tau.$$

Das Bestehen der Voraussetzung 1 ist sofort ersichtlich. 2 wird durch die Parametertransformation des Beispiels I erfüllt. Was 3 betrifft, so ist der Rand C von G definiert durch

$$0 \leq |\varkappa| \leq \pi; \qquad t = \tau$$

und die Transformationsgleichung der Parameter. Sein Bild ist die einfache Enveloppe E. Außerhalb $\bar{G}$ gibt es auch hier Punkte, die keine Bildpunkte sind, z. B. alle Punkte mit $y > 1$. Wegen der in § 5 gefundenen Beziehung $t < \tau \leq \pi$ ist (P_n) beschränkt. Somit gehört das Bild des Randes C zum Rand $\bar{C}$ des Bildes.

Die Rollen der Punkte (x_0, y_0) und $(\bar{x}_0\ \bar{x}_0)$ spielen die Punkte

$$(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = (0, 0) \quad \text{und} \quad (x, y) = 0, \sin\eta).$$

Das Randwertproblem besitzt also für alle innern Punkte $\neq (0, \sin\eta)$ von $\bar{G}$ genau eine Lösung.

§ 7. Ergänzungen

(2) besitzt für alle $\varkappa$ in jedem Intervall $k\pi < \tau \leq (k-1)\pi$ $(k = 0, 1, 2 \ldots n)$ genau eine positive Wurzel τ_k. Die Folge dieser Wurzeln werde mit (τ_n) bezeichnet, die Wurzel im Intervall $0 < \tau \leq \pi$ mit τ. Es gilt:

$$0 < \tau < (\tau_n) \tag{10}$$

Nach der allgemeinen Theorie braucht dieses Phänomen mithin nicht weiter beachtet zu werden.

Die ausgezeichnete Extremalenschar (1) berührt die Enveloppe unendlich oft. Es wäre nun denkbar, daß die „höhern" Enveloppenäste die ersten zwei schneiden, d. h. daß die Enveloppe Doppelpunkte aufwiese. Da wir aber die Existenz eines einfach berandeten Gebietes $\overline{G}$ nachgewiesen haben, braucht auch auf diese Frage nicht eingetreten zu werden.

Endlich können wir P nach 0 rücken lassen. Auf der Ellipse $x = \pi \sqrt{1 - y^2}$ wandernd, erreicht die „Spitze" die x-Achse im Punkte $(\pi, 0)$, und $\overline{G}$ ist symmetrisch in Bezug auf beide Achsen.

Es könnte jetzt gezeigt werden, daß immer genau 1 Wendepunkt vorhanden ist; wir treten darauf nicht ein.

Das Bemerkenswerte dieses Beispiels besteht darin, daß durch alle Punktepaare [25]) des Existenzgebietes Extremalen (und zwar sogar ∞ viele!) gelegt werden können, das Randwertproblem aber nur in einem viel beschränkteren Bereich Lösungen besitzt. Man ersieht daraus die fundamentale Bedeutung der Brennpunkte für die Variationsrechnung.

III. $F = \sqrt{(y^2 + 1)(x'^2 + y'^2)}$

§ 1. Existenzgebiet des Problems

Das dritte unserer Variationsprobleme ist in der ganzen (x, y)-Ebene definiert. Es unterscheidet sich dadurch prinzipiell von den zwei andern unserer Gruppe und somit auch vom klassischen Ausgangsproblem (vergleiche § 1, 1. Teil).

Angesichts der positiv definiten Grundfunktion verspricht man sich nichts besonderes. Es gibt nämlich keine Nullinie und keine singulären Linienelemente (vergleiche § 3, 1. Teil), und so erwartet man keine Enveloppe. Aber wie so oft trügt auch hier der Schein.

[25]) P = fester Punkt!

§ 2. Extremalen und ausgezeichnete Extremalenschar

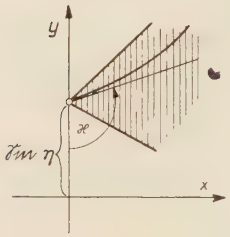
Man findet:

$$x' = k; \qquad y' = \pm \sqrt{y^2 + 1 - k^2}$$

Wie früher versieht man den Knotenpunkt mit der Abszisse Null; die Ordinate hingegen ist keiner Beschränkung zu unterwerfen. Integration liefert:

$$x = kt; \qquad y = y_0 \,\mathfrak{Cof}\, t \pm \sqrt{y_0^2 + 1 - k^2} \cdot \mathfrak{Sin}\, t$$

Wieder besitzt t_0 den Wert 0. Wir bringen die Wurzel weg (Abb. 5):



$$y_0 = \mathfrak{Sin}\, \eta$$
$$k = \mathfrak{Cof}\, \eta \cdot \sin \varkappa$$
$$y_0^2 + 1 - k^2 = \mathfrak{Cof}^2 \eta \cdot \cos^2 \varkappa$$

Man erhält:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \mathfrak{Cof}\, \eta \cdot \sin \varkappa \cdot t \\ y &= -\mathfrak{Cof}\, \eta \cdot \cos \varkappa \cdot \mathfrak{Sin}\, t + \mathfrak{Sin}\, \eta \cdot \mathfrak{Cof}\, t \end{aligned}} \qquad (1)$$

Schon an dieser Stelle zeigt sich eine reizvolle Besonderheit unseres Problems. Die Kurvenschar (1) liefert nämlich je nach dem Wert von $\varkappa$ verschiedene Kurven und zwar:

$$\begin{aligned} &\text{Für} \quad 1 > |\cos \varkappa| > \mathfrak{Tg}\, \eta; \quad \mathfrak{Sin}\text{-Linien.} \\ &\text{„} \qquad |\cos \varkappa| = \mathfrak{Tg}\, \eta: \quad \text{Exponentialkurven.} \qquad (1a) \\ &\text{„} \quad \mathfrak{Tg}\, \eta > \cos \varkappa > -\mathfrak{Tg}\, \eta; \quad \text{Kettenlinien.} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen wird $\varkappa$ auf das Intervall $0 \leq \varkappa \leq \pi$ beschränkt, und η kann positiv gewählt werden.

§ 3. Die Enveloppenbedingung

Die Auswertung der Bedingung $\Delta(t, \varkappa) = 0$ ergibt:

$$\cos^2 \varkappa \cdot \mathfrak{Cotg}\, \tau = \cos \varkappa \cdot \mathfrak{Tg}\, \eta - \frac{\sin^2 \varkappa}{\tau} \tag{2}$$

§ 4. Zusammenhang von $\varkappa$ und τ

Die Wurzeln der in $\cos \varkappa$ quadratischen Gleichung (2) sind:

$$\cos \varkappa = \frac{2K}{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4K^2 \cdot \Phi(\tau)}} \tag{3a}$$

$$\cos \varkappa = \frac{2K}{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4K^2 \cdot \Phi(\tau)}} \tag{3b}$$

Es bedeuten:

$$K = \mathfrak{Cotg}\, \eta\,; \qquad \Phi(\tau) = \tau \cdot \mathfrak{Cotg}\, \tau - 1 \tag{4}$$

In enger Anlehnung an das Beispiel I erledigen wir verschiedene Vorfragen.

a) Aus (2) kann mittelst der im § 7, 1. Teil, entwickelten Methode mühelos gefolgert werden, daß für alle $\varkappa$ aus dem Intervall $\mathfrak{Tg}\, \eta > \cos \varkappa > 0$ genau eine positive Wurzel τ existiert. Von den Kurven (1a) sind daher nur die Kettenlinien Träger von Brennpunkten.

b) Wegen $K > 1$ für endliches η ist die Nullstelle des Radikanden $R(\tau) \equiv \tau^2 - 4K^2 \cdot \Phi(\tau)$, der sich vom Radikanden des Beispiels I nur durch den Koeffizienten von $\Phi(\tau)$ unterscheidet, für jedes η vorhanden [26]). Wir behaupten:

Die erwähnte Nullstelle $\tau = \tau_0$ genügt der Bedingung $\tau_0 > 2K^2$.

---

[26]) Die genaue Diskussion von $R(\tau)$ zeigt, daß die erwähnte Nullstelle nur dann auftritt, wenn $R''(\tau) = 2 - 4A^2 \cdot \Phi''(\tau)$ für $\tau = 0$ negativ ausfällt, und dies ist eben für $A^2 = K^2 > 1$ der Fall.

Beweis: $$\begin{aligned} R(2K^2) &= 4K^4 - 4K^2[2K^2 \cdot \mathfrak{Cotg}(2K^2) - 1] \\ &= 4K^4 + 4K^2 - 8K^4 \cdot \mathfrak{Cotg}(2K^2) \\ &= 4K^2[K^2 + 1 - 2K^2 \cdot \mathfrak{Cotg}(2K^2)] \\ &< 4K^2[2K^2 - 2K^2 \cdot \mathfrak{Cotg}(2K^2)] \\ &= 8K^4[1 - \mathfrak{Cotg}(2K^2)] < 0! \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Bezeichnet man das zu τ_0 gehörige $\varkappa$ mit $\varkappa_0$, so gilt weiter[27]):

$$\cos \varkappa_0 = \frac{2K}{\tau_0} < \frac{1}{K} < 1.$$

Ferner bleibt die Behauptung b) (Beispiel I, § 4) über die Anzahl der Nullstellen bestehen; denn der Beweis benötigte die Größe A nicht.

c) (2) wird leider durch keine leicht ersichtlichen, endlichen Wertepaare erfüllt. Man findet dagegen folgende „Wurzeln“:

$$\cos \varkappa = 1/K; \qquad \tau = \infty$$
$$\cos \varkappa = 0; \qquad \tau = \infty.$$

Mit (2) muß nun entweder (3a) oder (3b) erfüllt sein. Unter Zuhilfenahme der Binominalformel erkennt man, daß an der obern Grenze $1/K$ von $\cos \varkappa$ die Wurzel mit dem negativen Zeichen zu nehmen ist. Der zweite Fall mit dem positiven Vorzeichen ist trivial.

Nach diesen Vorbereitungen überblicken wir die Funktion $\tau = \tau(\varkappa)$ ebensoleicht wie in den früheren Beispielen. Es gilt:

Sinkt $\cos \varkappa$ monoton von $1/K$ auf $2K/\tau_0$, so sinkt τ monoton von $+\infty$ auf τ_0.

Beweis: Wir betrachten die rechte Seite von (3b) als Funktion von τ. Sie ist reell, eindeutig und stetig und besitzt die Randwerte 1 und $2K/\tau_0$. Nach (2) ist sie auch monoton, also besitzt sie eine monotone Umkehrung. Im ganzen Intervall gilt:

$$\frac{dx}{d\tau} \leq 0 \qquad \text{w. z. b. w.} \qquad (5)$$

Sinkt $\cos \varkappa$ monoton von $2K/\tau_0$ auf 0, so steigt τ monoton von τ_0 auf $+\infty$.

---

[27]) Vergleiche (3a), (3b), (4) und die Bedingung $\tau_0 > 2K^2$.

Beweis: Die rechte Seite von (3a) ist als Funktion von τ reell, eindeutig und stetig und besitzt die Randwerte $2K\,\tau_0$ und 0. (2) verlangt Monotonie; also besitzt sie eine monotone Umkehrung.

Im ganzen Intervall gilt:

$$\frac{dx}{d\tau} \geq 0 \qquad \text{w. z. b. w.} \qquad (6)$$

Damit ist der ganze Wertevorrat von (2) erschöpft.

§ 5. Die Enveloppe

Grundlage der Diskussion bilden die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin\tau \\ y &= -\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \cos\varkappa \cdot \mathfrak{Sin}\,\tau + \mathfrak{Sin}\,\eta \cdot \mathfrak{Cof}\,\tau \end{aligned}} \qquad (8)$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin\varkappa \\ \frac{dy}{dt} &= \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \frac{\sin^2\varkappa}{\cos\varkappa} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\tau}{\tau} \\ \frac{dx}{d\tau} &= \left(1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}\right)\frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left(1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}\right)\frac{dy}{dt} \end{aligned}} \qquad (9)$$

Es folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varkappa \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\tau}{\tau} \qquad (10)$$

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ sind im Intervall $\mathfrak{Tg}\,\eta \geq \cos\varkappa \geq 0$ beständig positiv, so daß sich die Aufmerksamkeit auf den Faktor $1 \cdot \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}$ konzentriert.

Zunächst wenden wir uns dem Intervall $2K\ \tau_0 > \cos\varkappa > 0$ zu.

Wegen (6) besitzen $\operatorname{cotg}\varkappa$ und $\frac{d\varkappa}{d\tau}$ gleiches Vorzeichen, und $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ sind positiv. Ausgehend von Werten $x_0 - \varepsilon$, $y_0 - \varepsilon$ [28]) wachsen (x, y) mit τ monoton auf $x = +\infty$, $y = +\infty$. (Vergleiche (1).) Der betrachtete Enveloppenast ist eine einfache, offene Linie.

Für $\tau \to \tau_0$ findet man nach etwas langwieriger Rechnung

$$\left.\frac{d\varkappa}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = +\infty; \quad \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = +\infty$$

Ferner ist daselbst $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\tau_0^2 - 4K^2}}{2K} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\tau_0}{\tau_0} > 0.$

Aus (10) kann man entnehmen, daß $\frac{dy}{dx}$ mit τ monoton wächst [29]).

Also ist der vorliegende Enveloppenast sogar durchwegs konvex. Das Intervall $1 K > \cos\varkappa > 2K\ \tau_0$ aber bietet bedeutende Schwierigkeiten. Wegen $\frac{d\varkappa}{d\tau} \leq 0$ sind $\operatorname{cotg}\varkappa$ und $\frac{d\varkappa}{d\tau}$ nicht mehr gleichen Vorzeichens, und der Ausdruck $1 + \tau \cdot \operatorname{cotg}\varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}$ ist nicht leicht zu beurteilen.

Wir greifen deshalb wieder auf die in Beispiel I angewendete und ausführlich entwickelte Methode, haben also neuerdings die Funktion

$$V \equiv \Omega\left(\frac{\omega}{K^2}\right)^2 - \Omega(\Omega+5)\frac{\omega}{K^2} + (2\Omega+1)^2 \quad [30]) \qquad (11)$$

zu diskutieren. Dabei können alle einschlägigen Formeln (10)—(16), (18)—(27) übernommen werden. (Beispiel I, § 5.)

Wegen $K^2 \geq 1$ bedecken die Kurven $V = 0$ natürlich einen andern Bereich. (Abb. 6) [31])

---

[28]) ε beliebig klein, x_0 und y_0 dem Wert $\varkappa = \varkappa_0$ zugeordnet!

[29]) Beide Faktoren nehmen zu!

[30]) $A^2 \to K^2$!

[31]) In der Figur 6 ist die Kurve mit $K^2 = 2$ entworfen.

Alle Kurven $V = 0$ gehören dem Bereich $E_\infty BD_\infty$ an. Wir müssen nun die relative Lage der Kurve $\omega(\tau)$, $\Omega(\tau)$ in Bezug auf den doppelt schraffierten Bereich ergründen.

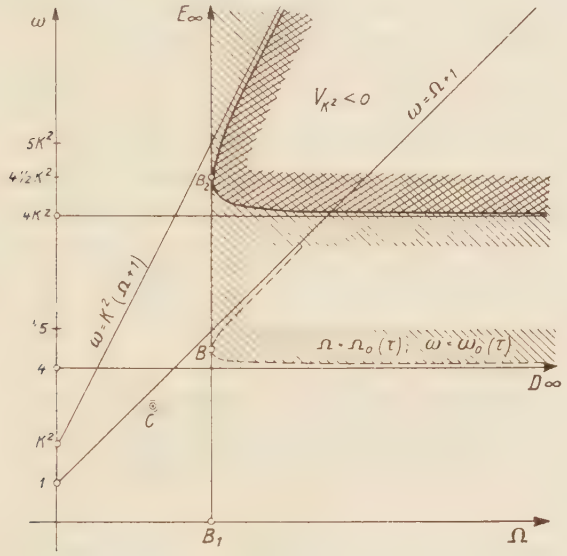


Abb. 6

Zunächst kann gezeigt werden, daß der Punkt $\Omega(\tau_0)$, $\omega(\tau_0)$ im Außengebiet $V > 0$ liegt [32]). Wegen $\tau_0^2 - 4K^2 \cdot \Phi(\tau_0) = 0$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned} V[\Omega(\tau_0), \omega(\tau_0)] &= 16\Omega - 4\Omega(\Omega + 5) + 4\Omega^2 + 4\Omega + 1 \\ &= 16\Omega - 4\Omega^2 - 20\Omega + 4\Omega^2 + 4\Omega + 1 \\ &= 1 > 0. \qquad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Ferner dringt die Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ ins Innengebiet der Kurve $V_K^2 = 0$ ein [33]). Dies beruht darauf, daß die Asymptote von $V_K^2 = 0$ wegen $K^2 > 1$ ganz über derjenigen von $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ liegt.

---

[32]) Dieser Punkt ist nicht gezeichnet, da wir ja τ_0 nicht berechnet haben. Es zeigt sich später, daß τ_0 geometrisch bedeutungslos ist.

[33]) $V_K^2 = 0$ ist natürlich eine durch $K = \operatorname{Cotg} \eta$ bestimmte Einzelkurve.

Aus den bewiesenen zwei Tatsachen folgt aber, daß der Ausdruck $1 + \tau \cdot \operatorname{cotg} \varkappa \cdot \frac{d\varkappa}{d\tau}$ mindestens einmal verschwindet. Nach (9) bedeutet dies die Existenz einer Spitze an der Stelle $\tau = \tau_2$, $\varkappa = \varkappa_2$ gemäß (3b). Der Anschluß des jetzt betrachteten Enveloppenastes an den ersten erfolgt an der Stelle $\tau = \tau_0$, $\varkappa = \varkappa_0$. Daselbst springen $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ von $-\infty$ auf $+\infty$. Wegen des Richtungswechsels von τ findet auf der Kurve selbst kein Richtungswechsel statt. Es handelt sich eben keineswegs um eine Singularität der Kurve, sondern nur um eine solche des Parameters τ. In der Tat gehen, was leicht nachzuprüfen ist, $\frac{dx}{d\varkappa}$ und $\frac{dy}{d\varkappa}$ stetig durch die Stelle $x_0\,(\varkappa_0, \tau_0)$, $y_0\,(\varkappa_0, \tau_0)$.

Viel schwieriger ist der Nachweis, daß die Enveloppe nur 1 Spitze aufweist.

Dieses Phänomen trifft, was beinahe evident ist, dann und nur dann zu, wenn der folgende Satz richtig ist:

Satz: *Die Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ schneidet die Kurve $V_{K^2} = 0$ höchstens einmal.*

Der Beweis ist derart umfangreich, daß eine eigene Numerierung sich aufdrängt.

Beweis.

a) Beweisideen.

1. Die Diskussion der Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$, von der wir schon wissen, daß sie ganz oberhalb der Kurve $V_{A^2=1}$ verläuft und monoton vom Punkte C nach rechts ansteigt, kann noch weiter getrieben werden[34]). Man stellt ohne großen Rechnungsaufwand fest, daß sie ganz unterhalb ihrer Asymptote $\omega = \Omega + 1$ verläuft[35]). An Hand der Abb. 6 macht man sich klar, daß damit der Satz mit der kleinen Einschränkung $K^2 \geq 10/9$ bewiesen ist. Für $K^2 < 10/9$ allerdings versagt die Idee.

2. Die Kurve $V_{A^2=1}$ läßt sich ebenfalls mit Hilfe des Parameters τ darstellen, wie später ausgeführt werden wird. Die Be-

[34]) Beispiel I, S. 22, Abb. 2.

[35]) $\omega(\tau) - \Omega(\tau) - 1 < 0$!

weisidee besteht nun darin, zu zeigen, daß in korrespondierenden Punkten mit gleichem τ die Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ weniger steil ansteigt als die Kurve $V_{A^2=1}$. Diese Eigenschaft bleibt nämlich für Punktepaare gleicher Abszisse erhalten, und da in korrespondierenden Punkten die Kurve $V_{K^2>1}$ immer steiler ansteigt als die Kurve $V_{A^2=1}$, so würde der Beweis geleistet sein. Die rechnerischen Schwierigkeiten sind so groß, daß man sich nach dem Vorbild des Beispiels I zum direkten Beweis entschließt.

3. Die Ausdrücke $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ werden in $V_{K^2}=0$ eingesetzt, und man zeigt, daß mit einer kleinen, später näher zu erläuternden Einschränkung die Funktion $V_{K^2>1}[\Omega(\tau), \omega(\tau)]$ höchstens eine Nullstelle haben kann.

b) Bezeichnugen.

$$\Omega(\tau) \equiv \frac{P(\tau)}{Q(\tau)}; \qquad \omega(\tau) \equiv \frac{p(\tau)}{q(\tau)} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} P(\tau) &\equiv [(\tau-1)\,T+(\tau+1)]^2; \qquad p(\tau) \equiv \tau^2(T-1) \\ Q(\tau) &\equiv (\tau-2)\,T^2+4(\tau^2+1)\,T-(\tau+2); \quad q(\tau) \equiv (\tau-1)T+(\tau+1) \end{aligned}\right\}^{36)} \tag{2}$$

$$T \equiv e^{2\tau} \tag{3}$$

$$K^4 V_{K^2} \equiv \Omega\,\omega^2 - K^2\,\Omega(\Omega+5)\,\omega + K^4(2\Omega+1)^2 \tag{4}$$

Wegen $P(\tau) \equiv [q(\tau)]^2$ kann (4) in der Form

$$Q^2 \cdot K^4 \cdot V_{K^2} \equiv Q\,p^2 - K^2 pq(P+5Q) + K^4(2P+Q)^2 \tag{4a}$$

geschrieben werden.

Wir setzen weiter:

$$Q^2 \cdot K^4 \cdot V_{K^2} \equiv Z; \qquad K^2 = 1 + k^2 \ ^{37)} \tag{5}$$

Durch Einsetzen von (5) in (4a) geht das letztere über in

$$\boxed{Z(\tau) \equiv I(\tau) + II(\tau)\,k^2 + III(\tau)\,k^4} \tag{6}$$

Nach Koeffitientenvergleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} I &\equiv Q p^2 - pq(P+5Q) + (2P+Q)^2 \\ II &\equiv -pq(P+5Q) + 2(2P+Q)^2 \\ III &\equiv (2P+Q)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

---

[36]) Vergleiche (21), (22), Beispiel I.

[37]) Dieser Ansatz stellt den Anschluß an (27), Beispiel I, her.

Nun werden die Ausdrücke rechterhand ausgewertet, und es resultiert:

$$I(\tau) \equiv \tau^2 \cdot 4\,T \cdot A^2; \quad A \equiv (\tau^2 - 3\tau + 3)\,T - (\tau^2 + 3\tau + 3) \quad [38] \qquad (7a)$$

$$II(\tau) \equiv -\tau^2 \cdot AB; \quad B \equiv (\tau - 3)\,T^3 + (23\tau - 15)\,T^2 + (23\tau + 15)\,T + (\tau + 3) \qquad (7b)$$

$$III(\tau) \equiv \tau^2 \cdot C^2; \quad C \equiv (2\tau - 3)\,T^2 + 8\tau \cdot T + (2\tau + 3) \qquad (7c)$$

Schließlich schreiben wir:

$$Z(\tau) \equiv \tau^2 \{4\,T \cdot A^2 - AB \cdot k^2 + C^2 \cdot k^4\} \qquad (7d)$$

c) Parameterdarstellung der Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$.

In (21), (22), Beispiel I, behalten wir nur die Glieder höchster Dimension bei und erhalten so die krummlinige Asymptote

$$\Omega_0(\tau) = \frac{(\tau - 1)^2}{\tau - 2}; \qquad \omega_0(\tau) = \frac{\tau^2}{\tau - 1} \qquad (8)$$

Die Werte (8) erfüllen die Gleichung

$$\omega = \frac{1}{2}\left[\Omega + 5 \pm (\Omega - 1)\sqrt{1 - \frac{4}{\Omega}}\right] \quad [39]$$

Bemerkenswerterweise ist also (8) eine rationale Parameterdarstellung von $V_{K^2=1} = 0$.

Für demselben τ entsprechenden Punkten (Ω, ω), (Ω_0, ω_0) gilt für $\tau \geq 0$:

$$\Omega = \frac{(\tau - 1)^2}{\tau - 2 + 2\tau \cdot \dfrac{[(\tau - 1)(2\tau^2 - 3\tau + 3)\,T - (\tau^2 - 3)]}{[(\tau - 1)\,T + \tau + 1]^2}}$$

$$\omega = \frac{\tau^2}{\tau - 1 + \dfrac{2\tau}{T - 1}}$$

Wir prüfen das Vorzeichen von $(\tau - 1)(2\tau^2 - 3\tau + 3)\,T - (\tau^2 - 3)$ für $\tau > 0$:

---

[38]) $I(\tau)$ wurde schon im Beispiel I berechnet, $III(\tau)$ ist leicht zu ermitteln; das Zerfallen von II, praktisch von großer Bedeutung, liegt versteckt.

[39]) Vergleiche (18), Beispiel I.

$$N(\tau) = (2\tau^3 - 5\tau^2 + 6\tau - 3)\,T - (\tau^2 - 3); \quad N(o) = 0$$
$$N^I(\tau) = (4\tau^3 - 4\tau^2 - 2\tau)\,T - 2\tau; \quad N^I(o) = 0$$
$$N^{II}(\tau) = (8\tau^3 + 4\tau^2 - 4\tau + 2)\,T - 2; \quad N^{II}(o) = 0$$
$$N^{III}(\tau) = (16\tau^3 + 32\tau^2)\,T > 0; \quad N^{III}(o) = 0$$

also: $N^{II}(\tau) = \int_0^\tau N^{III}(x)\,dx > 0$

$$N^I(\tau) = \int_0^\tau N^{II}(x)\,dx > 0$$

$$N(\tau) = \int_0^\tau N^I(x)\,dx > 0$$

Durch elementare Schlüsse erhält man die wichtigen Relationen:

$$\Omega < \Omega_0; \qquad \omega < \omega_0.$$

d) Durchführung.

Das Minimum von Ω_0 wird erreicht für $\tau = 3$ mit $\Omega_0(3) = 4$. Die Abb. 6 zeigt sofort, daß Schnittpunkte nur bei $\tau \geq 3$ auftreten können. Dieser Umstand gestattet die Durchführung des Beweises mittelst Abschätzungen.

Unsere Aufgabe besteht im Nachweis, daß für $\tau \geq 3$ der Ausdruck (7d) höchstens eine Nullstelle besitzt. Der Beweis wird indirekt geführt:

1. $A(\tau)$, $B(\tau)$ und $C(\tau)$ sind für $\tau \geq 3$ alle > 0. (Vergleiche 7a—c, Beispiel III.)

2. Wären zwei Nullstellen $\tau_1 < \tau_2$ vorhanden, so müßte gelten:

$$4\,T_1 \cdot A_1^2 - A_1 B_1 \cdot k^2 + C_1^2 \cdot k^4 = 0$$
$$4\,T_2 \cdot A_2^2 - A_2 B_2 \cdot k^2 + C_2^2 \cdot k^4 = 0$$

und dann:

$$(C_1^2 A_2 B_2 - C_2^2 A_1 B_1) : -4(T_1 A_1^2 C_2^2 - T_2 A_2^2 \cdot C_1^2) : \quad 4 A_1 A_2 (T_1 A_1 B_2 - T_2 A_2 B_1)$$
$$= 1 : k^2 : k^4\ ^{40})$$

Beispielsweise müßten also die erste und dritte Determinante dasselbe Vorzeichen oder die beiden Ausdrücke

---

40) 1, k^2, k^4 spielen die Rolle von Unbekannten!

$$\frac{A_2 B_2}{C_2^2} - \frac{A_1 B_1}{C_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{B_2}{T_2 A_2} - \frac{B_1}{T_1 A_1} \tag{9}$$

entgegengesetztes Vorzeichen erhalten[41]).

Nun beweisen wir aber, daß für $\tau \geq 3$ beide Ausdrücke (9) positiv sind. (Immer für $\tau_2 > \tau_1$!) Diese Behauptung ist äquivalent mit

$$\frac{\frac{A_2 B_2}{C_2^2}}{\frac{A_1 B_1}{C_1^2}} > 1; \qquad \frac{\frac{B_2}{T_2 A_2}}{\frac{B_1}{T_1 A_1}} > 1$$

oder mit $\ln\left(\frac{A_2 B_2}{C_2^2}\right) - \ln\left(\frac{A_1 B_1}{C_1^2}\right) > 0$; $\ln\left(\frac{B_2}{T_2 A_2}\right) - \ln\left(\frac{B_1}{T_1 A_1}\right) > 0$

„ „ $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau}\left(\ln \frac{AB}{C^2}\right) > 0$; $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau}\left(\ln \frac{B}{TA}\right) > 0$

„ „ $\frac{(AB)^\cdot}{AB} - 2\frac{C^\cdot}{C} > 0$; $\frac{B^\cdot}{B} - \frac{(TA)^\cdot}{TA} > 0$ [42])

oder schließlich mit

$$F(\tau) \equiv C(AB)^\cdot - 2C^\cdot(AB) > 0 \quad [41] \tag{10}$$

$$G(\tau) \equiv (TA)B^\cdot - (TA)^\cdot B > 0 \tag{11}$$

Die Berechnung ergibt:

$$\begin{aligned} F(\tau) \equiv\ & T^6(2\tau^3 - 9\tau^2 + 12\tau) \\ & - 2T^5(28\tau^4 - 164\tau^3 + 399\tau^2 - 372\tau + 144) \\ & + T^4(368\tau^4 - 374\tau^3 + 681\tau^2 - 1524\tau + 1152) \\ & + 12T^3(44\tau^4 + 21\tau^2 - 144) \\ & + T^2(368\tau^4 + 374\tau^3 + 681\tau^2 + 1524\tau + 1152) \\ & - 2T(28\tau^4 + 164\tau^3 + 399\tau^2 + 372\tau + 144) \\ & + 1(-2\tau^3 - 9\tau^2 - 12\tau) \end{aligned} \quad [44] \tag{12}$$

[41]) Division durch $C_1^2 C_2^2$ resp. $T_1 T_2 A_1 A_2 > 0$.

[42]) Dafür, daß ein Integral positiv sei im Intervall $\tau_1 \leqq \tau_2$, ist hinreichend, daß der Integrand daselbst positiv ist.

[43]) Alle vorkommenden Divisionen sind wegen Bemerkung 1 gestattet!

$$
\begin{aligned}
G(\tau) \equiv\ & T^5(2\tau^3 - 13\tau^2 + 30\tau - 24) \\
& - T^5(4\tau^3 + 22\tau^2 - 48\tau - 48) \\
& - T^3(92\tau^3 + 156\tau) \\
& - T^2(4\tau^3 - 22\tau^2 - 48\tau + 48) \\
& + T(2\tau^3 + 13\tau^2 + 30\tau + 24)
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

[44])

$A = (\tau^2 - 3\tau + 3)\,T - (\tau^2 + 3\tau + 3)\cdot 1$; $A' = (2\tau^2 - 4\tau - 3)\,T - (2\tau - 3)\cdot 1$

$B = (\tau - 3)\,T^3 + (23\tau - 15)\,T^2 + (23\tau + 15)\,T + (\tau + 3)\cdot 1$

$B' = (6\tau - 17)\,T^3 + (92\tau - 37)\,T^2 + (46\tau + 53)\,T + 1\cdot 1$

$C = (2\tau - 3)\,T^2 + 8\tau\cdot T + (2\tau + 3)$; $C' = (8\tau - 10)\,T^2 + (16\tau + 8)\,T + 2\cdot 1$

$$TA = (\tau^2 - 3\tau + 3)\,T^2 - (\tau^2 + 3\tau + 3)\,T$$

$$\begin{aligned} AB = {} & (\tau^3 - 6\tau^2 + 12\tau - 9)\,T^4 + (22\tau^3 - 84\tau^2 + 120\tau - 36)\,T^3 - (108\tau^2 - 90)\,T^2 \\ & - (22\tau^3 + 84\tau^2 + 120\tau + 36)\,T - (\tau^3 + 6\tau^2 + 12\tau + 9)\cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB' = {} & (6\tau^3 - 35\tau^2 + 69\tau - 51)\,T^4 + (86\tau^3 - 314\tau^2 + 420\tau - 60)\,T^3 \\ & - 46\tau^3 + 324\tau^2 + 186\tau - 270)\,T^2 - (46\tau^3 + 190\tau^2 + 300\tau + 156)\,T \\ & - (\tau^2 - 3\tau - 3)\cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA' = {} & (2\tau^3 - 10\tau^2 + 15\tau - 9)\,T^4 + (46\tau^3 - 124\tau^2 + 132\tau - 36)\,T^3 \\ & + 46\tau^3 - 108\tau^2 - 30\tau + 90)\,T^2 + (2\tau^3 - 44\tau^2 - 108\tau - 36)\,T \\ & - (2\tau^2 + 9\tau + 9)\cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB)' = {} & (8\tau^3 - 45\tau^2 + 84\tau - 60)\,T^4 + (132\tau^3 - 438\tau^2 + 552\tau - 96)\,T^3 \\ & - (432\tau^2 + 216\tau - 360)\,T^2 - (44\tau^3 + 234\tau^2 + 408\tau + 192)\,T \\ & - (3\tau^2 + 12\tau + 12) \end{aligned}$$

$$TA = (\tau^2 - 3\tau + 3)\,T^2 - (\tau^2 + 3\tau + 3)\,T$$

$$(TA)' = (4\tau^2 - 10\tau + 9)\,T^2 - (2\tau^2 + 8\tau + 9)\,T$$

$$\begin{aligned} TA\cdot B' = {} & T^5(6\tau^3 - 35\tau^2 + 69\tau - 51) + T^4(86\tau^3 - 314\tau^2 + 420\tau - 60) \\ & - T^3(46\tau^3 + 324\tau^2 + 186\tau - 270) - T^2(46\tau^3 + 190\tau^2 + 300\tau + 156) \\ & - T(\tau^2 + 3\tau + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (TA)'B = {} & T^5(4\tau^3 - 22\tau^2 + 39\tau - 27) + T^4(90\tau^3 - 292\tau^2 + 372\tau - 108) \\ & + T^3(46\tau^3 - 324\tau^2 - 30\tau + 270) - T^2(42\tau^3 + 212\tau^2 + 348\tau + 108) \\ & - T(2\tau^3 + 14\tau^2 + 33\tau + 27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\tau) \equiv {} & 2\tau^3 - 13\tau^2 + 30\tau - 24)\,T^5 - (4\tau^3 + 22\tau^2 - 48\tau - 48)\,T^4 \\ & - (92\tau^3 + 156\tau)\,T^3 - (4\tau^3 - 22\tau^2 - 48\tau + 48)\,T^2 \\ & + (2\tau^3 + 13\tau^2 + 30\tau + 24)\,T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(AB)' = {} & T^6(16\tau^4 - 114\tau^3 + 303\tau^2 - 372\tau + 180) \\ & + T^5(328\tau^4 - 1632\tau^3 + 3090\tau^2 - 2328\tau + 288) \\ & + T^4(1072\tau^4 - 4434\tau^3 + 5313\tau^2 + 732\tau - 1260) \\ & + T^3(176\tau^4 - 4272\tau^3 - 2052\tau^2 + 5184\tau + 288) \\ & - T^2(352\tau^4 + 2742\tau^3 + 5007\tau^2 + 1452\tau - 1116) \\ & - T(88\tau^4 + 624\tau^3 + 1614\tau^2 + 1704\tau + 576) \\ & - 1\,(6\tau^3 + 33\tau^2 + 60\tau + 36) \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung von $F(\tau)$ und $G(\tau)$ ist die Voraussetzung $\tau \geq 3$ wichtig, da sie starke Vernachlässigungen gestattet.

Für $\tau \geq 3$ gilt z. B.:

$$T = e^{2\tau} \geq e^6 > 400.$$
$$(\log e^6 = 2{,}60574\,; \quad e^6 \sim 403{,}4).$$

Alle positiven Koeffizientenpolynome werden nach unten, alle negativen nach oben abgeschätzt. So erhalten wir Minoranten, von denen wir nachzuweisen haben, daß sie im Intervall $3 \leq \tau < \infty$ positiv sind.

1. $F(\tau)$, dessen 7 Terme nach fallenden Potenzen von T numeriert werden, ist leicht zu bewältigen.

α) Die für $T \geq 3$ ersichtlich positiven Terme 3 und 4 werden weggelassen.

β) Die Terme 5—7 werden zusammengezogen, wobei in 6 $2T$ durch $T^2 > 2T$, in 7 τ durch $T^2 > \tau$ ersetzt wird:

$$\begin{aligned}
2C'(AB) = {} & T^6(16\tau^4 - 116\tau^3 + 312\tau^2 - 384\tau + 180) \\
& + T^5(384\tau^4 - 1960\tau^3 + 3888\tau^2 - 3072\tau + 576) \\
& + T^4(704\tau^4 - 4060\tau^3 + 4632\tau^2 + 2256\tau - 2412) \\
& - T^3(352\tau^4 + 4272\tau^3 + 2304\tau^2 + 5184\tau - 2016) \\
& - T^2(720\tau^4 + 3116\tau^3 + 5688\tau^2 + 2976\tau + 36) \\
& - T(32\tau^4 + 296\tau^3 + 816\tau^2 + 960\tau + 288) \\
& - 1(4\tau^3 + 24\tau^2 + 48\tau + 36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\tau) \equiv {} & (2\tau^3 - 9\tau^2 + 12\tau)T^6 - (56\tau^4 - 328\tau^3 + 798\tau^2 - 744\tau + 288)T^5 \\
& + (368\tau^4 - 374\tau^3 + 681\tau^4 - 1524\tau + 1152)T^4 \\
& + (528\tau^4 \qquad + 252\tau^2 \qquad - 1728)T^3 \\
& + (368\tau^4 + 374\tau^3 + 681\tau^2 + 1524\tau + 1152)T^2 \\
& - (56\tau^4 + 328\tau^3 + 798\tau^2 + 744\tau + 288)T \\
& - (2\tau^3 + 9\tau^2 + 12\tau)\cdot 1
\end{aligned}$$

Interessanterweise ist $F(\tau)$ vom Typus

$$F \equiv T^3[\Phi(\tau) + \Phi(-\tau)]\,; \quad \Phi(\tau) \equiv T^3(2\tau^3 - 9\tau^2 + 12\tau)$$
$$- 2T^2(28\tau^4 - 164\tau^3 + 399\tau^2 - 372\tau + 144)$$
$$+ T(368\tau^4 - 374\tau^3 + 681\tau^2 - 1524\tau + 1152)$$
$$+ 6(44\tau^4 + 21\tau^2 - 144).$$

während $G(\tau)$ die Zerlegung

$$G(\tau) \equiv T^3[\Psi(\tau) - \Psi(-\tau)]\,; \quad \Psi(\tau) \equiv T^2(2\tau^3 - 13\tau^2 + 30\tau - 24)$$
$$- T(4\tau^3 + 22\tau^2 - 48\tau - 48)$$
$$- 1(46\tau^3 + 78\tau)$$

gestattet.

$$T^2(368\tau^4 + 374\tau^3 + 681\tau^2 + 1524\tau + 1152) \quad 5$$
$$T^2(-28\tau^4 - 164\tau^3 - 399\tau^2 - 372\tau - 144) \quad 6$$
$$T^2(\quad - 2\tau^2 - 9\tau - 12) \quad 7$$
$$T^2(340\tau^4 + 210\tau^3 + 280\tau^2 + 1143\tau + 996) > 0$$

Die Terme 5—7 dürfen also ebenfalls weggelassen werden, und es verbleiben die Terme 1 und 2.

γ) Nach leichter Umformung erhält man:

$$F(\tau) > T^5 \cdot \tau \cdot H(\tau); \quad H(\tau) \equiv (2\tau^2 - 9\tau + 12)\,T - (56\tau^3 - 328\tau^2 + 798\tau) \tag{14}$$

δ) Nun wird $H(\tau)$ sukzessive abgeleitet:

$$\begin{aligned}
H(\tau) &= (2\tau^2 - 9\tau + 12)\,T - (56\tau^3 - 328\tau^2 + 798\tau)\\
H^I(\tau) &= (4\tau^2 - 14\tau + 15)\,T - (168\tau^2 - 656\tau + 798)\\
H^{II}(\tau) &= (8\tau^2 - 20\tau + 16)\,T - (336\tau - 656)\\
H^{III}(\tau) &= (16\tau^2 - 24\tau + 12)\,T - 336\\
H^{IV}(\tau) &= (32\tau^2 - 12\tau)\,T\\
H^V(\tau) &= (64\tau^2 + 40\tau - 12)\,T\\
H^{VI}(\tau) &= (128\tau^2 + 208\tau + 16)\,T;
\end{aligned}$$

H_{VI} sowie alle höhern Ableitungen sind im Intervall $3 \leq \tau < \infty$ positiv. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
H(3) &= 3T - 954 > 3 \cdot 400 - 954 > 0\\
H^I(3) &= 9T - 342 > 9 \cdot 400 - 342 > 0\\
H^{II}(3) &= 28T - 352 > 28 \cdot 400 - 352 > 0\\
H^{III}(3) &= 84T - 336 > 84 \cdot 400 - 336 > 0\\
H^{IV}(3) &= 252T > 252 \cdot 400 > 0\\
H^V(3) &= 684T > 684 \cdot 400 > 0
\end{aligned}$$

ε) In der Taylorentwicklung von $H(\tau)$ sind alle Koeffizienten positiv. $H(\tau)$ nimmt also im ganzen Intervall $\tau > 3$ nur positive Werte an. Dasselbe gilt aber gemäß (14) auch für $F(\tau)$. w.z.b.w.

2. Die Beurteilung von $G(\tau)$ ist schwieriger. Man kommt nicht mit einer Minorante aus, was davon herrührt, daß das Polynom $4\tau^3 - 22\tau^2 - 48\tau - 48$ im betrachteten Intervall $3 < \tau < \infty$ das Vorzeichen wechselt.

Sämtliche Koeffizientenpolynome sind vom 3. Grad in τ. Eine Kurve 3. Grades, das zugehörige Bild, besitzt bekanntlich höchstens 3 Nullstellen, 2 Extrema und eine Wendestelle, und zwar liegt die letztere zwischen den Extrema. Dieser Tatbestand erleichtert die Diskussion ungemein. Wir stellen die nötigen Daten tabellarisch zusammen.

Polynom	Reelle Nullstellen	Extrema	Wendestelle	Wert für $\tau = 3$
$A(\tau) \equiv (2\tau^3 - 13\tau^2 + 30\tau - 24)$	$\tau_1 = 2$	—	$\tau = 2\frac{1}{2}$	+ 3
$B(\tau) \equiv (4\tau^3 + 22\tau^2 - 48\tau - 48)$	$-8 < \tau_1 < -7$ $-1 < \tau_2 < 0$ $2 < \tau_3 < 3$	$\tau_1 \sim -4{,}545$ $\tau_2 \sim +0{,}881$	$\tau = -3\frac{1}{2}$	− 114
$C(\tau) \equiv \tau\,(92\tau^2 + 156)$	$\tau_1 = 0$	—	$\tau = 0$	− 2952
$D(\tau) \equiv (4\tau^3 - 22\tau^2 - 48\tau + 48)$	$-3 < \tau_1 < -2$ $0 < \tau_2 < 1$ $6 < \tau_3 < 7$ [45])	$\tau_1 \sim -0{,}932$ $\tau_2 \sim +6{,}432$	$\tau = -1\frac{1}{6}$	− 186

Das Polynom $2\tau^3 - 13\tau^2 - 30\tau - 24$ benötigen wir bei der Minorantenbildung nicht.

Nun behaupten wir:

$A(\tau)$ steigt im Intervall $3 \leq \tau < \infty$ monoton von -3 auf ∞
$B(\tau)$ „ „ „ $3 \leq \tau < \infty$ „ „ $+114$ „ ∞
$C(\tau)$ „ „ „ $3 \leq \tau < \infty$ „ „ 2952 „ ∞
$D(\tau)$ ist im Intervall $3 \leq \tau < \tau_3 \sim 6.9739569$ beständig negativ und steigt im Intervall $\tau_3 \leq \tau < \infty$ monoton von 0 auf ∞.

Die Beweise entnimmt man der Tabelle.

Nach diesen Vorbereitungen gelingt die Konstruktion positiver Minoranten.

a) Im Intervall $\tau_3 < \tau < \cdot$ sind alle Polynome von $G(\tau)$ positiv. Außer dem letzten Term muß also zunächst alles berücksichtigt werden.

[45]) $\tau_3 \sim 6{,}9739569\ldots$

In $D(\tau)$ wird sodann $(48 - 48\tau) < 0$ für $\tau \geq 3$ vernachlässigt und $(4\tau^3 - 22\tau^2) < 4\tau^3$ durch $4\tau^3$ ersetzt.

In $C(\tau)$ tritt an die Stelle von $92\tau^3 - 156\tau$ der größere Ausdruck $248\tau^3$.

In $B(\tau)$ lassen wir $-(48\tau + 48) < 0$ für $\tau \geq 3$ weg und ersetzen $(4\tau^3 + 22\tau^2) < 26\tau^3$ durch $26\tau^3$.

Es folgt:

$$G(\tau) > T^2 \left| \begin{array}{r} (2\tau^3 - 13\tau^2 + 30\tau - 24)\,T^3 \\ -\ 26\tau^3 \cdot T^2 \\ -\ 248\tau^3 \cdot T \\ -\ 4\tau^3 \cdot 1 \end{array} \right.$$

Im betrachteten Intervall ist -3 das Minimum von $A(\tau)$. Sodann schreiben wir in den übrigen drei Termen statt $T, 1$ überall T^2 und erhalten:

$$G(\tau) \geqslant T^4 \cdot H(\tau); \quad H(\tau) \equiv 3T - 278\tau^3 \tag{15}$$

Behauptung: $H(\tau)$ ist von $\tau > \tau_0 > 3$ an positiv, wenn $H(\tau_0)$ positiv ist.

Beweis:

Wegen $(3T)' = 6T > 3T$ und $(278\tau^3)' = 3 \cdot 278\tau^2 < 278\tau^3$ für $\tau > \tau_0 > 3$ ist $H'(\tau)$ beständig positiv. w. z. b. w.

Nun ist:

$$H(3) \sim 3 \cdot 400 - 7526 \leqslant 0!$$

Aber schon für $\tau_0 = 5$ berechnet man:

$$H(5) > 3 \cdot 22026 - 34750 \geqslant 0 \tag{16}$$

Da ja T mit τ kolossal wächst, ist damit bewiesen, daß $G(\tau)$ im abgeschlossenen Intervall $5 \leq \tau < \infty$ beständig positiv ist.

b) Im Intervall $3 \leq \tau < \tau_3 \sim 6{,}97395$ ist $D(\tau)$ beständig negativ. Wir schreiben:

$$G(\tau) > T^3 \cdot H_1(\tau); \quad H_1(\tau) \equiv (2\tau^3 - 13\tau^2 + 30\tau - 24)\,T^2 - (4\tau^3 + 22\tau^2 - 48\tau - 48)\,T - (92\tau^3 + 156\tau)\cdot 1$$ [46])

Jetzt machen wir von (16) folgenden Gebrauch:

Im Intervall $3 \leq \tau \leq 5$ besitzt $A(\tau)$ das Minimum $+3$
„ „ $3 \leq \tau \leq 5$ „ $B(\tau)$ „ Maximum $+262$
„ „ $3 \leq \tau \leq 5$ „ $C(\tau)$ „ „ $+12280$.

Ferner ersetzt man $3T^2$ durch $1200\,T < T^2$. Mit diesen Werten erhalten wir die starke Minorante

$$H_2(\tau) \equiv 938\,T - 12280 \tag{17}$$

und diese ist wegen $938 \cdot 400 - 12280 > 0$ beständig positiv. Dasselbe trifft auch für $G(\tau)$ zu.

Damit sind $F(\tau)$ und $G(\tau)$ als Funktionen erkannt, die im Intervall $3 \leq \tau < \infty$ beständig positiv sind[47]).

$Z(\tau)$ (Vergleiche 6) besitzt also für jedes k^2 genau eine Nullstelle. Gemäß Abb. 6 kann infolgedessen die Kurve $\Omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ nach vollzogenem Eintritt in das Innengebiet $V_K^2 < 0$ dasselbe nicht mehr verlassen. Daraus folgt, daß die Enveloppe genau 1 Spitze aufweist[48]). Auch der zweite Enveloppenast ist eine einfache Linie, die wegen (10) von der Spitze weg nach rechts ansteigt[49]).

Die Enveloppendiskussion ist damit keineswegs beendigt. Zwar besteht diese wichtige Kurve aus zwei einfachen Teilbögen; weil dieselben aber einander schneiden oder berühren könnten, sind Knoten- und Selbstberührungspunkte möglich. Die vollständige Lösung dieser Probleme erfordert neue Hilfsmittel, die durch

---

[46]) $-D(\tau)$ ist positiv und fällt weg!

[47]) Im Intervall $0 \leq \tau < 3$ dürfen $G(\tau)$ und $F(\tau)$ Nullstellen besitzen; der geleistete Beweis würde davon nicht berührt!

[48]) Vermutlich ist es eine Schnabelspitze! Ihr Ort kann aus (6) bequem gefunden werden, indem man sich ein $\tau_1 > 3$ vorgibt; dadurch ist dann der Knotenpunkt bestimmt!

[49]) Gemäß (10) sind nämlich außer Wendepunkten keine weitern Singularitäten möglich!

Elimination von t aus (1) gewonnen werden. Die inhomogene Methode wird uns gestatten, volle Klarheit über die Gestalt der Enveloppe zu schaffen; durchgreifenden Erfolg hat sie nur, weil ein entscheidendes Resultat der homogenen Methode benützt werden kann, nämlich die Tatsache, daß die Enveloppe von einer Parallelen zur y-Achse höchstens in 2 Punkten geschnitten wird[50]).

Ausgangspunkt ist der leicht zu findende Ausdruck

$$2y = (\mathfrak{Sin}\,\eta - \mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\cos\varkappa)\,e^{\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin\varkappa}} + (\mathfrak{Sin}\,\eta + \mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\cos\varkappa)\,e^{-\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin\varkappa}}$$

Wir leiten nach $\varkappa$ ab $\left(\frac{\partial}{\partial\varkappa} = '\right)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} 2y' = {} & e^{\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin\varkappa}}\,\frac{[\mathfrak{Cof}^2\eta\cdot\sin^3\varkappa - x\cdot\cos\varkappa(\mathfrak{Sin}\,\eta - \mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\cos\varkappa)]}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin^2\varkappa} \\ & + e^{-\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin\varkappa}}\,\frac{[x\cdot\cos\varkappa(\mathfrak{Sin}\,\eta + \mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\cos\varkappa) - \mathfrak{Cof}^2\eta\cdot\sin^3\varkappa]}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin^2\varkappa} \end{aligned} \tag{12}$$

y muß, als Funktion von $\varkappa$ betrachtet, im Intervall $\mathfrak{Tg}\,\eta > \cos\varkappa > 0$ gemäß (2) stationäre Werte besitzen, die der Gleichung $y' = 0$ genügen. Wir zerlegen dieselbe in zwei Teile und haben nach elementarer Umformung die Gleichung

$$e^{\frac{2x}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin\varkappa}} = \frac{Z(\varkappa)}{N(\varkappa)};\quad \begin{aligned} Z(\varkappa) &= \mathfrak{Cof}^2\eta\cdot\sin^3\varkappa - x\cdot\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\cos^2\varkappa - x\cdot\mathfrak{Sin}\,\eta\cdot\cos\varkappa \\ N(\varkappa) &= \mathfrak{Cof}^2\eta\cdot\sin^3\varkappa + x\cdot\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\cos^2\varkappa - x\cdot\mathfrak{Sin}\,\eta\cdot\cos\varkappa \end{aligned} \tag{13}$$

zu diskutieren.

a) Die linke Seite ist beständig positiv und nimmt mit wachsendem $\varkappa$ monoton ab. Wegen

$$\left(e^{\frac{2x}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin\varkappa}}\right)' = -\frac{2x\cdot\cos\varkappa}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin^2\varkappa}\cdot e^{\frac{2x}{\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin\varkappa}} < 0 \quad \text{für } 0 < \varkappa < \pi/2$$

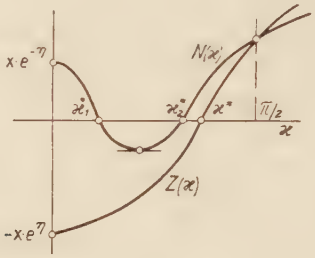
ist sie sogar beständig konvex.

b) $Z(\varkappa)$ nimmt im betrachteten Intervall sowohl positive als auch negative Werte an, und zwar steigt die Funktion monoton von $-x\cdot e^{\eta}$ für $\varkappa = 0$ auf $\mathfrak{Cof}\,\eta^2$ für $\varkappa = \pi/2$. Es ist genau 1 Null-

[50]) Dies folgt aus der Einfachheit der beiden Teilbögen.

stelle $\varkappa = \varkappa^*$ vorhanden, die für $x > \frac{1}{2}\mathfrak{Sin}^2\eta$ ins Intervall $\mathfrak{Tg}\,\eta > \cos\varkappa > 0$ fällt[51]) (Abb. 7).

Abb. 7



c) $N(\varkappa)$ wird umgeformt in

$$N(\varkappa) = Z(\varkappa) + 2x\cdot\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\cos^2\varkappa.$$

Ferner berechnet man:

$$N'(\varkappa) = \sin\varkappa\,[3\,\mathfrak{Cof}^2\eta\cdot\sin\varkappa\cos\varkappa - 2x\cdot\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\cos\varkappa + x\cdot\mathfrak{Sin}\,\eta]$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Funktion im Intervall $0 \leq \varkappa \leq \pi/2$ genau 1 Nullstelle aufweist. Nun folgt aber sofort, daß $N(\varkappa)$ im betrachteten Intervall höchstens 2 Nullstellen besitzt (Abb. 7). Wir bezeichnen sie mit $\varkappa_1^*$, $\varkappa_2^*$. Es gilt:

$$\varkappa_1^* \leq \varkappa_2^* < \varkappa^*.$$

Die rechte Seite von (19) muß demnach in den Intervallen $\varkappa_1^* < \varkappa < \varkappa_2^*$ und $\varkappa^* < \varkappa < \pi/2$ verfolgt werden, wo sie positiv ist[52]).

d) Nun brauchen wir noch die Ableitung von $\left(\frac{Z}{N}\right)$:

$$\left(\frac{Z}{N}\right)' = \frac{N\cdot Z' - Z\cdot N'}{N^2} = \frac{2x\cdot\mathfrak{Cof}\,\eta\cdot\sin\varkappa\cos\varkappa}{N^2}\cdot[\mathfrak{Cof}^2\eta\cdot\sin\varkappa(3-\sin^2\varkappa) - x\,\mathfrak{Sin}\,\eta\cos\varkappa$$

Der Ausdruck $\mathfrak{Cof}^2\eta\cdot\sin\varkappa(3-\sin^2\varkappa) - x\cdot\mathfrak{Sin}\,\eta\cdot\cos\varkappa$ besitzt im Intervall $0 < \varkappa < \pi/2$ genau eine Nullstelle $\varkappa = \varkappa^{**}$. Nullsetzen des Ausdruckes liefert nämlich die Gleichung $\frac{x\cdot\mathfrak{Tg}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta}\cdot\operatorname{cotg}\varkappa = 3\text{-}\sin^2\varkappa$, aus welcher die Behauptung unmittelbar hervorgeht.

---

[51]) $Z(\mathfrak{Tg}\,\eta) = \frac{1-2x\cdot\mathfrak{Sin}^2\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta}$!

[52]) Weil nämlich die linke Seite von (19) positiv ist, kann die Gleichung nur bei positiver rechter Seite bestehen!

e) Die Nullstelle $\varkappa^*$ von $Z(\varkappa)$ ist Wurzel der Gleichung

$$\frac{x \cdot \mathfrak{Tg}\,\eta \cdot \operatorname{cotg}\varkappa}{\mathfrak{Cof}\,\eta} = \frac{\sin^2\varkappa}{1 + \mathfrak{Cotg}\,\eta \cdot \cos\varkappa};$$

Die Nullstelle $\varkappa^{**}$ von $\left(\frac{Z}{N}\right)'$ ist Wurzel der Gleichung

$$\frac{x \cdot \mathfrak{Tg}\,\eta \cdot \operatorname{cotg}\varkappa}{\mathfrak{Cof}\,\eta} = 3 - \sin^2\varkappa.$$

Vergleich der beiden rechten Seiten führt unmittelbar auf die Beziehung $\varkappa^{**} < \varkappa^*$.

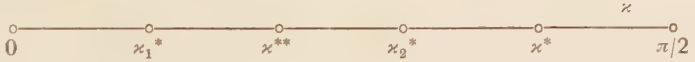
f) Wegen der Stetigkeit von $\left(\frac{Z}{N}\right)'$, wegen $\left(\frac{Z}{N}\right)_{\varkappa = \pi/2} > 0$ und weil $Z(\varkappa)$ im Intervall $0 < \varkappa < \pi\ 2$ nur eine Wurzel besitzt, folgt weiter:

$$\varkappa_1^* \leq \varkappa^{**} \leq \varkappa_2^*$$

Zusammenfassung von b) bis f) liefert:

$$\boxed{0 < \varkappa_1^* \leq \varkappa^{**} \leq \varkappa_2^* < \varkappa^* < \pi/2}$$

g) Den vorbereitenden Untersuchungen entnehmen wir folgende Resultate:



$Z(\varkappa)$:		$<0;$		$<0;$		$<0;$		$<0;$	$0;$	$>0;$	
$N(\varkappa)$:		$>0;$	$0;$	$<0;$		$<0;$	$0;$	$>0;$		$>0;$	
$\frac{Z}{N}$:	$-e^{2\eta}<0;$	$<0;$	$\infty;$	$>0;$		$>0;$	$\infty;$	$<0;$		$>0;$	$1;$
$\left(\frac{Z}{N}\right)'$:		$0;$	$<0;$	$\infty;$	$<0;$	$0;$	$>0;$	$\infty;$	$>0;$		$>0;$

Ferner ist $e^{\frac{2x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin\varkappa}}\Big|_{\cos\varkappa = \mathfrak{Tg}\,\eta} = e^{2x} \geq 1$

$$\left(\frac{Z}{N}\right)_{\cos\varkappa = \mathfrak{Tg}\,\eta} = 1 - 2x \cdot \mathfrak{Sin}^2\eta \leq 1.$$

Wir haben also die Funktion $\left(\frac{Z}{N}\right)$ sogar nur im Intervall

$$\varkappa_1^* \leq \varkappa \leq \varkappa_2^*$$

zu betrachten. (Vergleiche Abb. 8.)

Dank des eingangs erwähnten Umstandes, daß die Enveloppe von einer beliebigen Parallelen zur y-Achse höchstens in 2 Punkten getroffen wird, brauchen wir uns um die 2. Ableitung von $\frac{Z}{N}$ nicht zu kümmern. Wir gehen von einem bestimmten, nicht zu kleinen x aus, für welches sicher 2 Schnittpunkte auftreten, und untersuchen sodann das Verhalten von y' als Funktion von x.

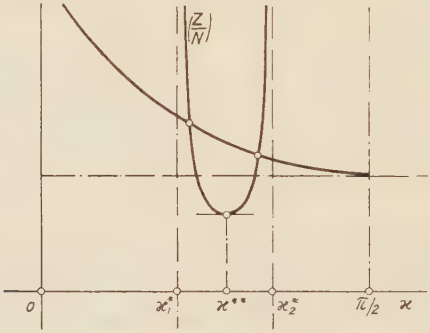


Abb. 8

Die linke Seite von (19) nimmt mit wachsendem x monoton zu.

Die partielle Ableitung der rechten Seite von (19) nach x berechnet sich zu

$$-\frac{2\,\mathfrak{Cof}^3\eta\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x}{(\mathfrak{Cof}^2\eta\cdot\sin^3 x+x\cdot\mathfrak{Cof}\eta\cdot\cos^2 x-x\cdot\mathfrak{Sin}\eta\cdot\cos x)^2},$$

ist infolgedessen im betrachteten Intervall beständig negativ.

Von der Ausgangsstellung der Figur 8 hebt sich also die Kurve $e^{\frac{2x}{\mathfrak{Cof}\eta\sin x}}$ mit wachsendem x, während sich die Kurve $\left(\frac{Z}{N}\right)$ monoton senkt. Sinkt aber x, so entsteht genau einmal ein Berührungspunkt; es ist beinahe evident, daß dieses Phänomen für die Funktion y' einen Terrassenpunkt bedeutet. Derselbe induziert, wie man sich leicht klar macht, die Enveloppenspitze. Knoten- und Selbstberührungspunkte sind somit ausgeschlossen.

In Abb. 9 ist y als Funktion von $\varkappa$ dargestellt.

Abb. 9

Man entnimmt ihr, daß der 2. der betrachteten Enveloppenäste ($1 \cdot K > \cos \varkappa > 2\,K\,_{10}$) ganz oberhalb des ersten verläuft[53]).

Damit ist endlich bewiesen, daß unsere Enveloppe eine einfache Kurve ist und ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\overline{G}_{12}$ berandet. (Abb. 10.) Ersetzt man $\Phi(\tau)$ durch 1, was für große Werte von τ zulässig ist, so erhält man eine krummlinige Asymptote.

Zum Schluß weisen wir noch nach, daß die Enveloppe ganz im „Winkelraum“ $\mathfrak{Tg}\,\eta > \cos \varkappa > -\mathfrak{Tg}\,\eta$ verläuft[54]).

Beweis:

$\mathfrak{Tg}\,\eta > \cos \varkappa > -\mathfrak{Tg}\,\eta$ ergibt:

$$\sin \varkappa > \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\iota_i}$$

Aus

$$2y = (\mathfrak{Sin}\,\iota_i + \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \cos \varkappa)\, e^{\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin \varkappa}} + (\mathfrak{Sin}\,\iota_i + \mathfrak{Cof}\,\iota_i \cdot \cos \varkappa)\, e^{-\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin \varkappa}}$$

folgt zunächst:

$$2y < (\mathfrak{Sin}\,\eta - \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \cos \varkappa)\, e^{\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin \varkappa}} + (\mathfrak{Sin}\,\eta + \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \cos \varkappa)\, e^{\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin \varkappa}}$$

$$= 2\,\mathfrak{Sin}\,\iota_i \cdot e^{\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin \varkappa}} < 2\,\mathfrak{Sin}\,\iota_i \cdot e^{x}$$

und dann:

$$2y > (\mathfrak{Sin}\,\iota_i - \mathfrak{Cof}\,\iota_i \cdot \cos \varkappa)\, e^{-\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin \varkappa}} + (\mathfrak{Sin}\,\eta + \mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \cos \varkappa)\, e^{-\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin \varkappa}}$$

$$= 2\,\mathfrak{Sin}\,\eta \cdot e^{-\frac{x}{\mathfrak{Cof}\,\eta \cdot \sin \varkappa}} > 2\,\mathfrak{Sin}\,\eta \cdot e^{-x}$$

also schließlich:

$$\mathfrak{Sin}\,\eta \cdot e^{-x} < y < \mathfrak{Sin}\,\eta_i \cdot e^{x}$$

---

[53]) Nach Abb. 8 nimmt überdies die Strecke $\overline{AB}$ mit x vermutlich monoton zu!

[54]) Gemäß § 4, a), braucht nur dieser Winkelraum betrachtet zu werden, da er allein Brennpunkte enthält!

Das sind aber gerade die in (1a) aufgezählten und in Abb. 5 angedeuteten Exponentialkurven:

$$\cos\varkappa = +\,\mathfrak{Tg}\,\eta \qquad \sin\varkappa = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\eta} \qquad \text{resp.} \qquad \cos\varkappa = -\,\mathfrak{Tg}\,\eta \qquad \sin\varkappa = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\eta}$$

die somit für unser Problem eine anschauliche geometrische Bedeutung besitzen.

§ 6. Anwendung des Abbildungssatzes

Die Grundfunktion unseres Variationsproblems ist positiv definit. Im Gegensatz zu so vielen Problemen derselben Kategorie ist gezeigt worden, daß eine reelle Enveloppe existiert. Allerdings ist die Funktion derselben nicht so einfach, wie wir gleich dartun werden.

Aus der im § 5 errechneten Formel

$$2y = (\mathfrak{Sin}\,\eta_1 - \mathfrak{Cof}\,\eta_1 \cdot \cos\varkappa)\, e^{\mathfrak{Cof}\,\eta_1 \cdot \sin\varkappa \cdot x} + (\mathfrak{Sin}\,\eta_1 + \mathfrak{Cof}\,\eta_1 \cdot \cos\varkappa)\, e^{-\mathfrak{Cof}\,\eta_1 \cdot \sin\varkappa \cdot x}$$

folgt nämlich:

Durchläuft $\varkappa$ das Intervall $0 < \varkappa < 2\pi$, so nimmt y für jedes x als stetige Funktion von $\varkappa$ der Reihe nach alle endlichen Werte an [55]).

Im Gegensatz zu den beiden andern Beispielen ist es also nicht möglich, Punkte der (x, y)-Ebene anzugeben, welche a priori nicht Bildpunkte sein können; damit entfällt aber auch die Möglichkeit, zu beweisen, daß Voraussetzung 3 des Abbildungssatzes erfüllt ist (vergleiche den Abbildungssatz und § 6, Beispiel I). Diese Schwierigkeit wird umgangen durch Zerlegung von G in 3 Teilbereiche G_1, G_0, G_2 und Anwendung des Abbildungssatzes auf dieselben. Es werden definiert:

---

[55]) Die Beschränkung von $\varkappa$, bis anhin nützlich, wird fallengelassen, um überflüssige Ränder zu vermeiden!

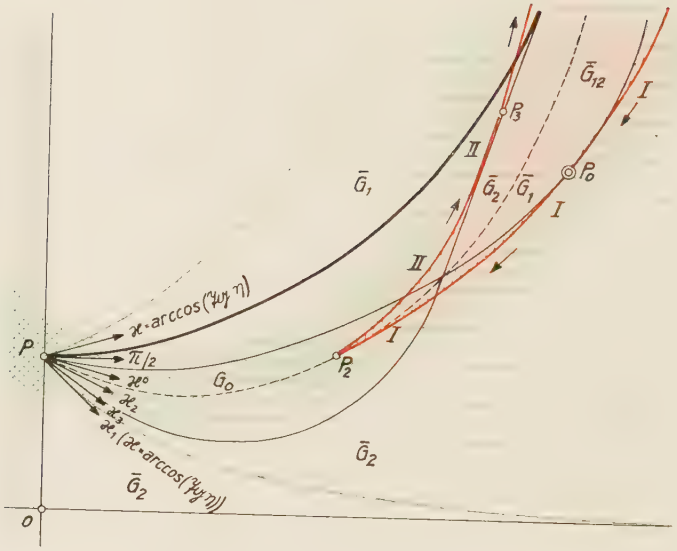


Abb. 10

Reihenfolge.

τ	$\varkappa$	P	
∞	$\pi/2$	∞	
$\vee$	$\vee$		
τ_0	$\varkappa_0$	P_0	
$\wedge$	$\vee$		
τ_2	$\varkappa_2$	P_2	Spitze.
$\wedge$	$\vee$		
τ_3	$\varkappa_3$	P_3	
$\wedge$	$\vee$		
∞	$\varkappa_1$	∞	

G_1 durch: $-1 \leq \cos\varkappa < 0$; $0 < t < \infty$

$0 \leq \cos\varkappa \leq \cos\varkappa_0$; $0 < t < \tau$ (τ aus (3a))

$\cos\varkappa_0 < \cos\varkappa \leq \cos\varkappa_2$; $0 < t < \tau$ (τ aus (3b))

G_2 durch: $\cos\varkappa_2 \leq \cos\varkappa \leq 1/C$; $0 < t < \tau$ (τ aus (3b))

$1/C < \cos\varkappa \leq 0$; $0 < t < \infty$

G_0 durch; $\cos\varkappa = \cos\varkappa_2$; $0 < t < \tau$ [56])

Es ist leicht zu sehen, daß alle Ränder C_i aus lauter einfachen Bögen bestehen, so daß G_1, G_2 und G_0 einfach zusammenhängend sind.

Vermittelst (1) werden abgebildet:

G_1 auf denjenigen Teil der (x, y)-Ebene, der oberhalb des speziellen Extremalenbogens mit $\varkappa = \varkappa_2$; $0 \leq t \leq \tau$ und des Enveloppenbogens I liegt. (Vergleiche Abb. 10.)

G_2 auf denjenigen Teil der (x, y)-Ebene, der unterhalb des erwähnten Extremalenbogens sowie des Enveloppenbogens II liegt.

G_0 auf den speziellen Extremalenbogen mit $\varkappa = \varkappa_2$; $0 < t < \tau$.

Durch Einführung kartesischer Parameter wird die Singularität in $P(t = 0)$ beseitigt. (Vergleiche Beispiel I.)

Alle Punkte mit $y < 0$ liegen außerhalb von $\overline{G}_1$ und sind nicht Bildpunkte von G_1. Alle Punkte mit $x < x_2$; $y > \text{Max}\ (y_P, y_{P_2})$ liegen außerhalb von $\overline{G}_2$ und sind nicht Bildpunkte von G_2. Für G_0 sind die Verhältnisse trivial. Wegen der aus (1) folgenden Beziehung $y \geq \mathfrak{Sin}(\eta - t)$ bleibt (P_n) beschränkt. Demnach gehören die Bilder von C_i zu $\overline{C}_i$. Da auch, wie man sich ohne Mühe überzeugt, Voraussetzung 2 und 4 des Abbildungssatzes erfüllt sind, so ist ersichtlich, daß G_1, G_2, G_0 umkehrbar eindeutig auf $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_0$ abgebildet werden. Ein gewisses Gebiet $\overline{G}_{12}$, das Innere der Enveloppe, wird demnach doppelt überdeckt. Die Spitze in P_2 ist dem Knotenpunkt P zugekehrt, was nach *Kneser* bewirkt, daß die spezielle Extremale mit $\varkappa = \varkappa_2$ ihren Extremalen-

---

[56]) G_0 ist eindimensional und liefert in Verbindung mit $\Delta(t, \varkappa) = 0$ die Ränder von G_1 und G_2, während sein eigener Rand aus dem Punktepaar $P_1 P_2$ besteht.

charakter in P_2 nicht verliert, obschon daselbst $\Delta(t, \varkappa)$ verschwindet[57]). Überdies wird sie auch doppelt überdeckt, was natürlich nichts ausmacht.

Damit haben wir folgendes Resultat sichergestellt:

> Im Innern der Enveloppe hat das Randwertproblem immer genau 2, im ganzen Restgebiet genau 1 Lösung[58]).

Es ist bemerkenswert, daß durch eine so einfache Grundfunktion wie $\sqrt{(1-y^2)}\,(x^2-y^2)$ bei Abwesenheit von singulären Linienelementen dieser komplizierte Tatbestand hervorgerufen werden kann!

§ 7. Ergänzung

Was geschieht, wenn P nach 0 rückt? Wegen $\mathfrak{Sin}\,\eta = 0$ reduzieren sich die Extremalen auf $\mathfrak{Sin}$-Linien, und (2) besitzt keine reellen Wurzeln mehr, so daß die Enveloppe verschwindet. Es liegt dann der einfachste Fall der Variationsrechnung vor, der auch für den allgemeinen Fall zu erwarten war.

[57]) *Carathéodory:* 355, S. 295 ff.

[58]) Das Gebiet G, welches die Anwendung des Abbildungssatzes zuläßt, braucht in diesem Zusammenhang gar nicht angegeben zu werden.

Berichtigungen

S. 7, 8. Zeile: $\sqrt{U(x_1, x_2)(x'^2_1 + x'^2_2)}$

S. 8, 23. Zeile: $2 x_i' x_i''$

S. 12: $\Psi(x)$

S. 19, 6. Zeile: $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$

S. 38, 29. Zeile: $\frac{d\varkappa}{d\tau} \leq 0$

S. 39, 6. Zeile: $\frac{d\varkappa}{d\tau} \geq 0$

10. Zeile: $x = \mathfrak{Cof}\, \eta \cdot \sin \varkappa \cdot \tau$

S. 45, 2. Zeile: $(4\tau^3 - 4\tau^2 + 2\tau)$

S. 47, 14. Zeile: $- (46\tau^3 + \cdots$

17. Zeile: $+ (46\tau^3 - \cdots$

30. Zeile: $(2\tau^3 - \cdots$

S. 48, 12. Zeile: $\tau \geq 3$

S. 49, 18. Zeile: H^{VI}

S. 59, 3. Zeile: $\cos \varkappa_0 < \cos \varkappa < \cos \varkappa_2$

4. Zeile: $\cos \varkappa_2 < \cos \varkappa \leq 1/C$

S. 60. 8. Zeile: $\sqrt{(1 + y^2)(x'^2 + y'^2)}$

Abbildung 10: $\bar{G}_0$; $\varkappa = \arccos(-\mathfrak{Tg}\, \eta)$

Lebenslauf

Geboren wurde ich am 22. Januar 1907 in Biel und besuchte die Primarschule und das Progymnasium daselbst, später die Sekundarschule Lyss. Im Frühling 1922 trat ich ins bernische Staatsseminar Bern-Hofwil ein und wurde 1926 als Primarlehrer patentiert. Nach sechsjähriger Primarschulpraxis in Lotzwil immatrikulierte ich mich im Frühling 1932 an der Universität Bern, bestand 1934 das Sekundarlehrerexamen mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung und setzte darauf meine Studien in Mathematik, Physik und Chemie fort. Seit 1. Oktober 1938 amtiere ich als Sekundarlehrer in Herzogenbuchsee.

Während meiner Studien in Bern besuchte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren Scherrer, Crelier, Michel, Hadwiger, Gonseth, Mauderli, Kohlschütter, Signer, Feitknecht, Greinacher, Gruner, Baltzer, Baumann und Sganzini. Ihnen allen spreche ich für die vielseitigen Anregungen meinen besten Dank aus.

Zu besonderem Danke bin ich meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. W. Scherrer verpflichtet. Die vorliegende Dissertation steht im Zeichen seiner stetigen Anteilnahme und fördernden Leitung.